Une Approche Asymptotique pour l'Étude des Systèmes à Grande Échelle

Nicolas Gast

Grenoble Universités

Ecole Jeunes Chercheurs 2010 – GDR-IM

Évaluation de performance : pourquoi, comment ?

Systèmes à *grande échelle* :

- clusters de calcul, réseaux de communication,...
- modèle d'épidémies, propagation de croyance,...
- évolution de population, réactions chimiques,...

Évaluation de performance : pourquoi, comment ?

Systèmes à *grande échelle* :

- clusters de calcul, réseaux de communication,...
- modèle d'épidémies, propagation de croyance,...
- évolution de population, réactions chimiques,...

- Évaluer les performances
  - Quantification
  - Dimensionnement
- Garanties d'exécution,
  - Probabilistes
  - Pire cas
- Contrôle stochastique,
- ...

Évaluation de performance : pourquoi, comment ?

Systèmes à *grande échelle* :

- clusters de calcul, réseaux de communication,...
- modèle d'épidémies, propagation de croyance,...
- évolution de population, réactions chimiques,...

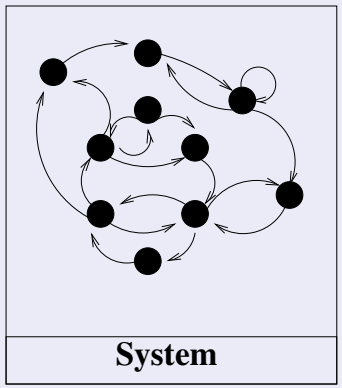
- Évaluer les performances
  - Quantification
  - Dimensionnement
- Garanties d'exécution,
  - Probabilistes
  - Pire cas
- Contrôle stochastique,
- ...

Moyens

- Mesure
  - Coûteux, délicat
- Simulation
  - Temps de calcul, précision
- Analyse théorique
  - Abstraction, approximation

Système complexe : automate non déterministe

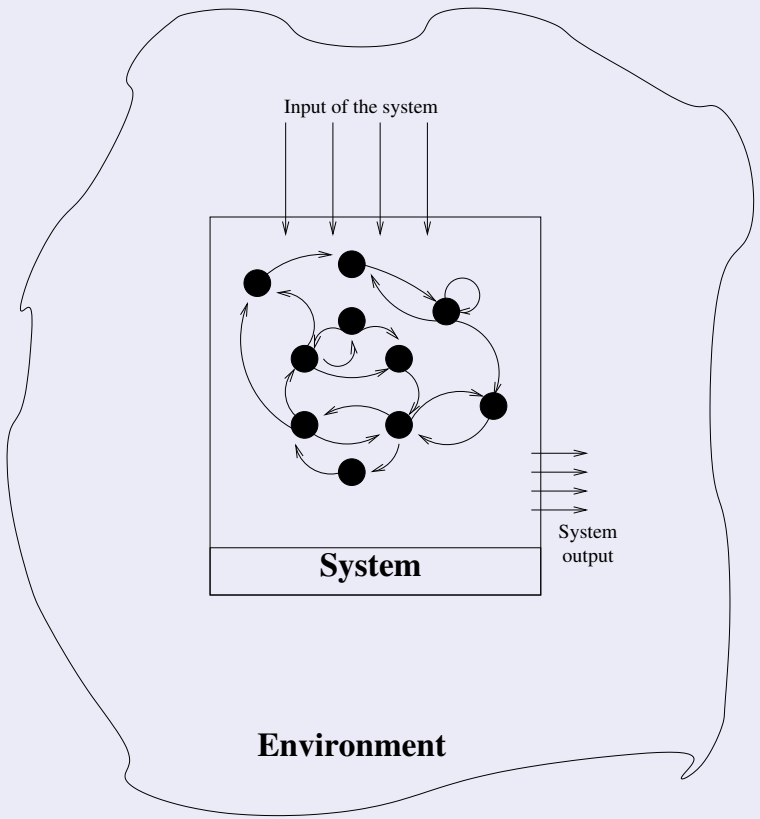
Système complexe



- Automate
- Temps discret ou continu

Système complexe : automate non déterministe

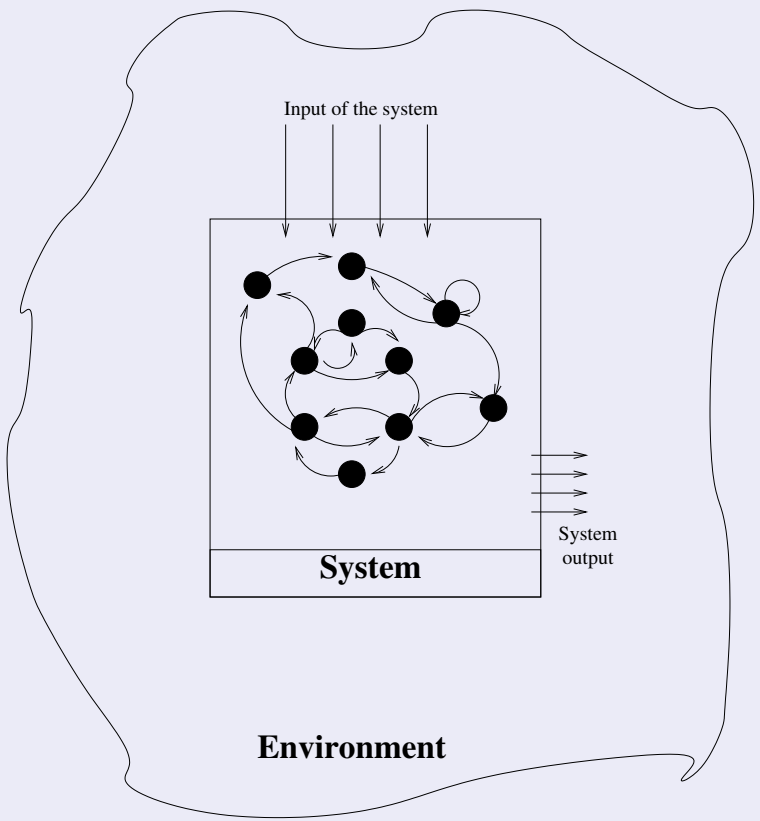
Système complexe



- Automate
- Temps discret ou continu
- Phénomènes aléatoires
  - Modélisation de l'environnement extérieur.
  - Modèle simplifié du programme

Système complexe : automate non déterministe

Système complexe



- Automate
- Temps discret ou continu
- Phénomènes aléatoires
  - Modélisation de l'environnement extérieur.
  - Modèle simplifié du programme

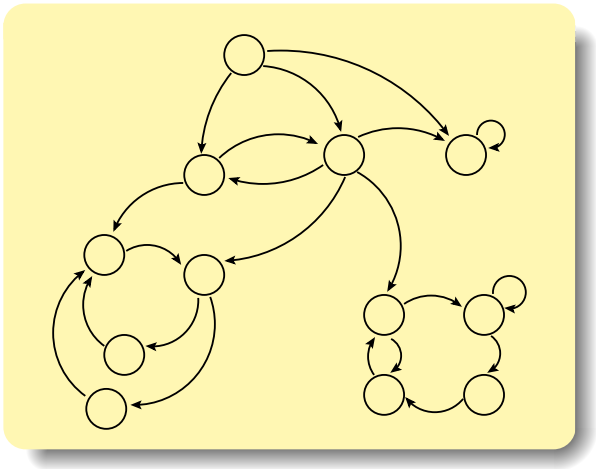
Problème

Caractériser le système

- définir un modèle théorique
- l'analyser dans des cas pratiques

Objectifs et méthodes

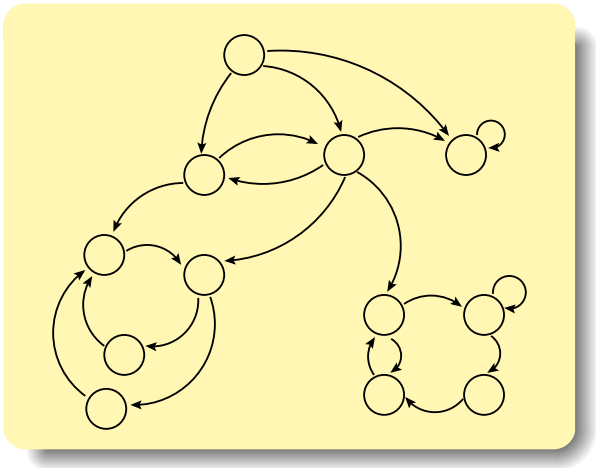
- Un outil théorique : la chaîne de Markov.



- Espace d'état (fini, infini,...)
- X_t : état à l'instant t.
- Transitions : probabilité de passer d'un état à l'autre (aléatoire).

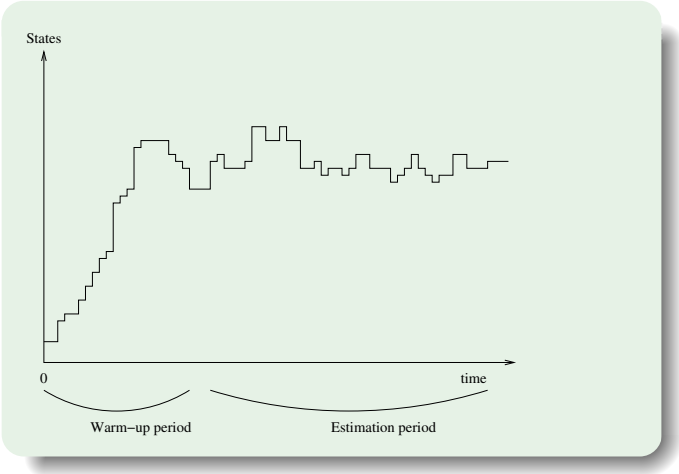
Objectifs et méthodes

- Un outil théorique : la chaîne de Markov.



  - Espace d'état (fini, infini,...)
  - X_t : état à l'instant t.
  - Transitions : probabilité de passer d'un état à l'autre (aléatoire).

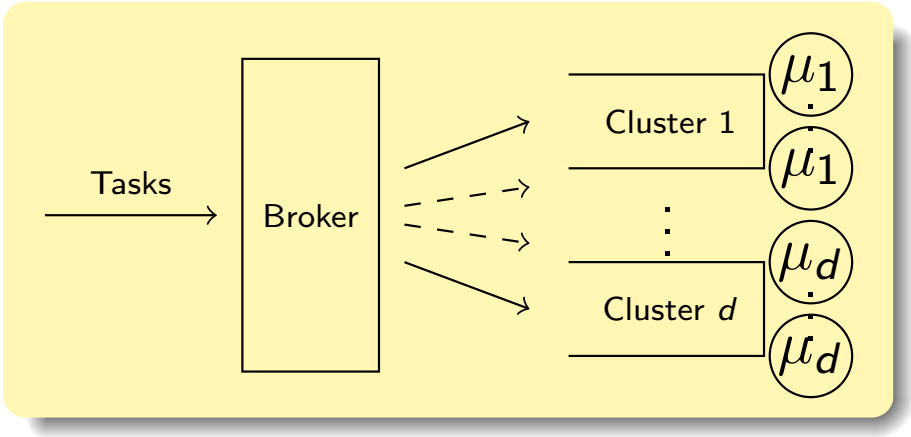
- Objectif – Étudier le processus aléatoire $(X_t)_t$
  - régime transitoire / permanent
  - définir des métriques
    - ★ Temps d'attente moyen
    - ★ Probabilité de panne,...
  - Résoudre des problèmes d'optimisation.
  - Calcule analytique / simulation



Un exemple

Cluster de calcul

- Répartition de charge
- Consommation de ressources

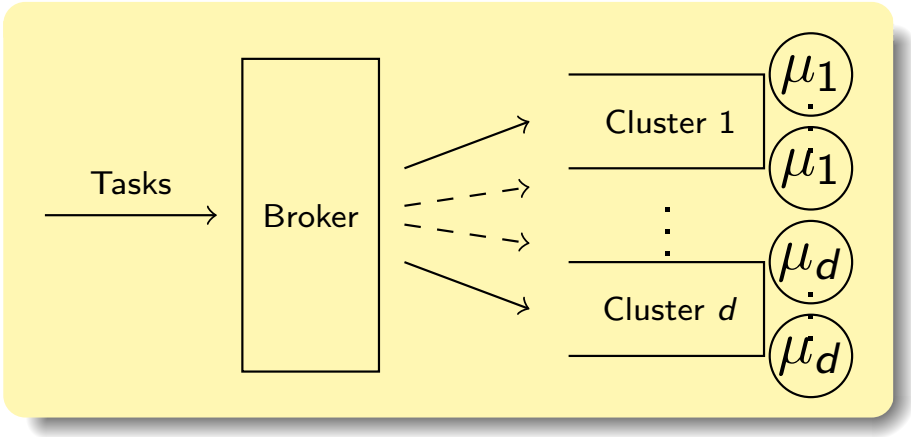


- Régime transitoire
  - Une grosse application : temps d'exécution ?
- Régime permanent
  - Temps moyen de réponse
  - Probabilité de pertes
- Contrôle stochastique
  - Minimiser le temps d'attente,...

Un exemple

Cluster de calcul

- Répartition de charge
- Consommation de ressources

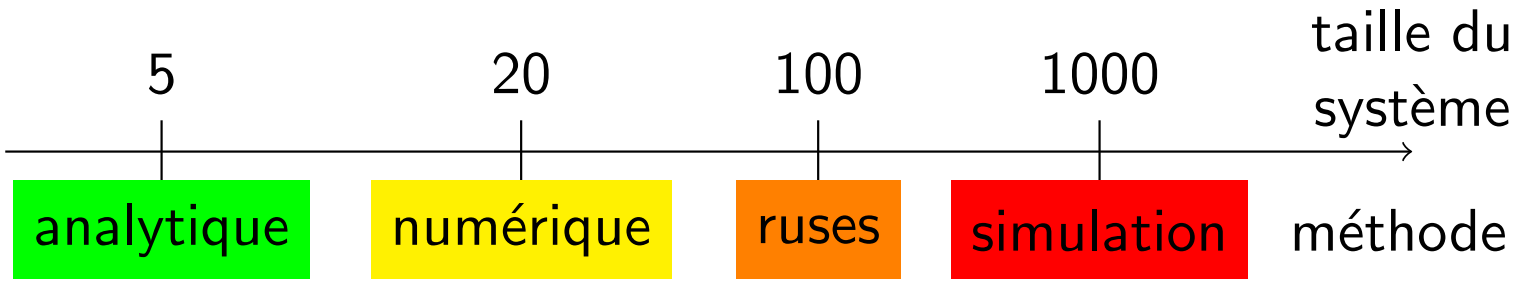


- Régime transitoire
  - Une grosse application : temps d'exécution ?
- Régime permanent
  - Temps moyen de réponse
  - Probabilité de pertes
- Contrôle stochastique
  - Minimiser le temps d'attente,...

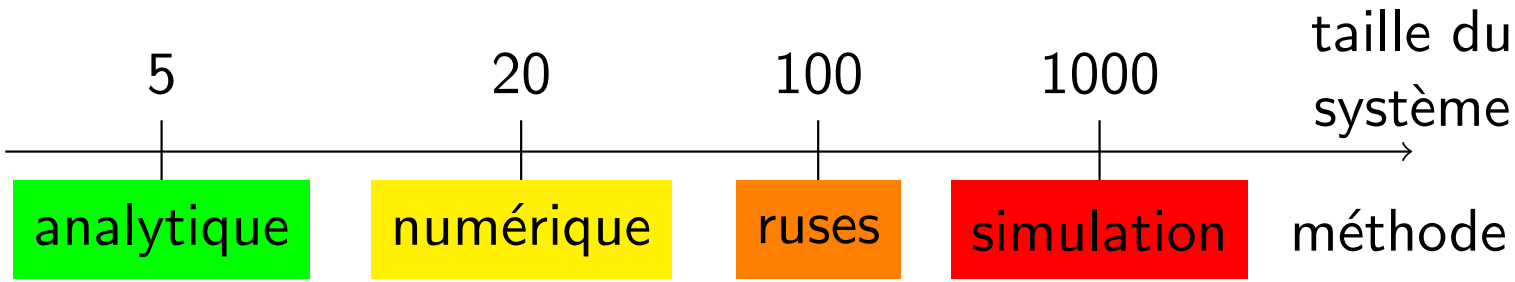
Problème d'explosion combinatoire

- Complexité linéaire/quadratique en le nombre d'états.
- Problème : Si N machines avec S états : S^N états.

En pratique


5
20
100
1000
taille du système
analytique
numérique
ruses
simulation
méthode

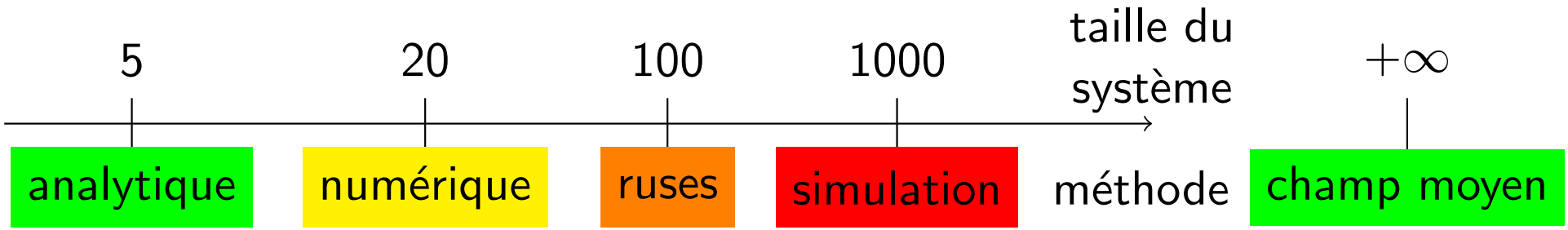
En pratique



Étude :

- Méthodes analytiques directes
  - Bonne intuition sur le problème,
- Méthodes numériques
  - Stabilité, convergence,...
- Ruses
  - Formes produits, Stochastic Automata Network (SAN),...
- Simulation

En pratique



Étude :

- Méthodes analytiques directes
  - Bonne intuition sur le problème,
- Méthodes numériques
  - Stabilité, convergence,...
- Ruses
  - Formes produits, Stochastic Automata Network (SAN),...
- Simulation
- Approximation champ moyen
  - Convergence vers un régime déterministe, asymptotiquement en forme produit, régime transitoire/permanent ...
  - Résultats analytiques et numériques, simulation,...

1 Motivation

2 Modèles Champ moyen

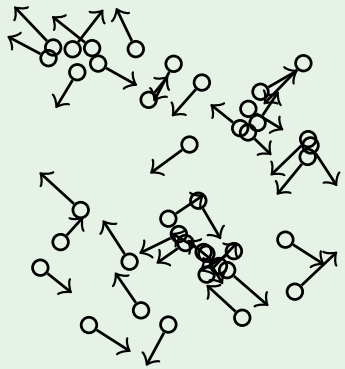
3 Applications

4 Conclusion & références

Un modèle introduit en physique

Description microscopique

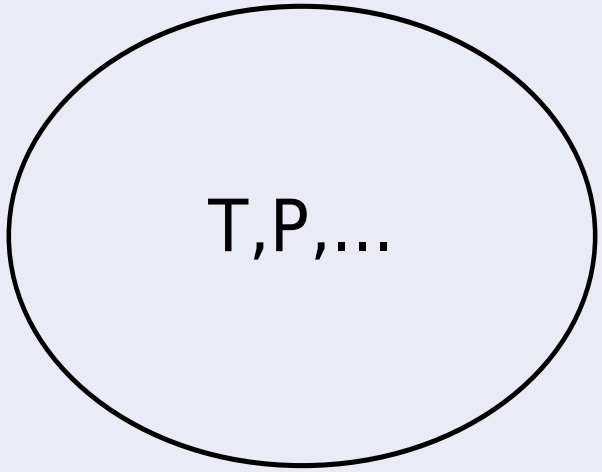
Système avec "beaucoup" d'objets semblables :



État : $\mathcal{X}^N = (X^1 \dots X^N)$
Problème : espace d'état en S^N.

Description macroscopique

On s'intéresse au comportement moyen.



État : $M_i^N = \sum_{n=1}^N \mathbf{1}_{X^n=i}$.

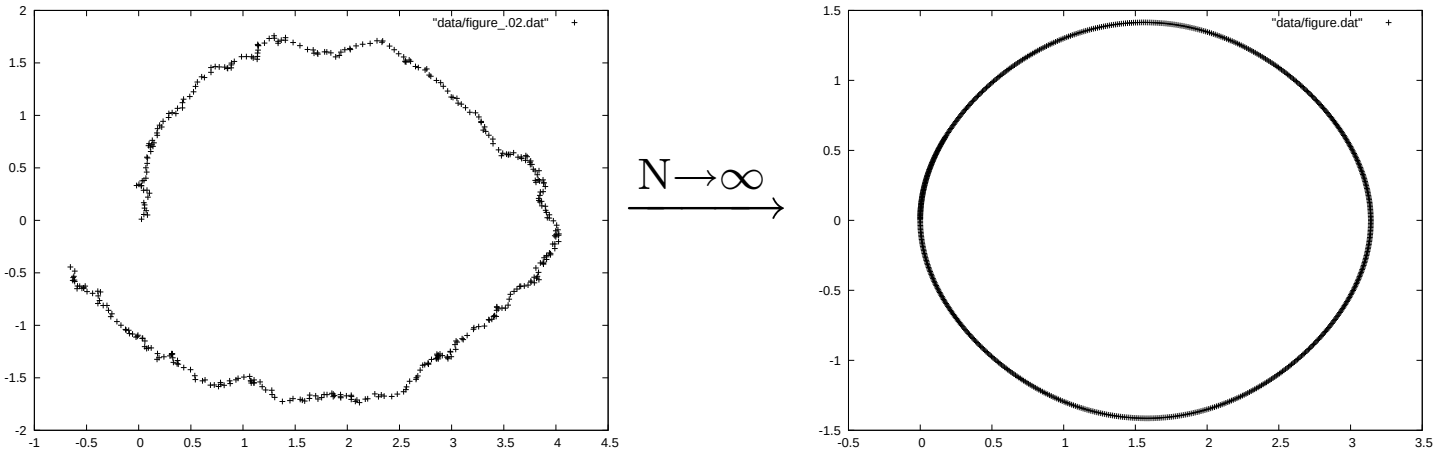
Le passage de la description microscopique à la description macroscopique s'appelle approximation champ moyen.

Convergence

On s'intéresse à $M^N(t)$ (nombre moyen d'objets dans chaque état).

Idée – quand le nombre d'objets N devient grand, $M^N(t)$ tend vers un comportement déterministe.

- Approximation of population processes [Kurtz, 81]
- Propagation of chaos [Sznitman, 91]
- Performance of TCP [Baccelli, McDonald, Reynier 02]
- Approximation of stochastic evolution in games [Benaïn, Weibull 03]
- 802.11 [Bordenave, McDonald, Proutière 05]
- Reputation Systems [Le Boudec et al. 07]
- ...



Convergence

On s'intéresse à $M^N(t)$ (nombre moyen d'objets dans chaque état).

Idée – quand le nombre d'objets N devient grand, $M^N(t)$ tend vers un comportement déterministe.

- Approximation of population processes [Kurtz, 81]
- Propagation of chaos [Sznitman, 91]
- Performance of TCP [Baccelli, McDonald, Reynier 02]
- Approximation of stochastic evolution in games [Benaïn, Weibull 03]
- 802.11 [Bordenave, McDonald, Proutière 05]
- Reputation Systems [Le Boudec et al. 07]
- ...

Objectif

- Prouver les résultats de convergence pour une grande classe de problèmes.
- Utiliser ces résultats pour étudier des problèmes d'optimisation.

Modèle d'interaction champ moyen

Système à N objets

- N objets
- Etat $X_1(t) \dots X_N(t)$.
- Action "admissible" $A(t)$.
- Noyau d'évolution : $K(\mathcal{X}(t), A(t))$.

Modèle d'interaction champ moyen

Système à N objets

- N objets
- Etat $X_1(t) \dots X_N(t)$.
- Action "admissible" $A(t)$.
- Noyau d'évolution : $K(\mathcal{X}(t), A(t))$.

Hypothèse

- Intensité $I(N) \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$.
- Objets interchangeables.
- drift : $f(m,a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f^N(m,a)}{I(N)}$.

$$f^N(m,a) = \mathbb{E}\left[M^N(t+1) - M^N(t) | M^N(t) = m, A(t) = a\right]$$

Modèle limite : $\frac{\partial m_A(t)}{\partial t} = f(m_A(t), A(t))$

Modèle d'interaction champ moyen

Système à N objets

- N objets
- Etat $X_1(t) \dots X_N(t)$.
- Action "admissible" $A(t)$.
- Noyau d'évolution : $K(\mathcal{X}(t), A(t))$.

Hypothèse

- Intensité $I(N) \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0$.
- Objets interchangeables.
- drift : $f(m,a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{f^N(m,a)}{I(N)}$.

$$f^N(m,a) = \mathbb{E}\left[M^N(t+1) - M^N(t) | M^N(t) = m, A(t) = a\right]$$

Modèle limite : $\frac{\partial m_A(t)}{\partial t} = f(m_A(t), A(t))$

Théorème

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \leq T} \left\| M^N(t/I(N)) - m_A(t) \right\| \geq \epsilon\right) \leq \frac{J(N,T)}{\epsilon^2} \rightarrow 0.$$

Modèle d'interaction champ moyen

Système à N objets

- N objets
- Etat $X_1(t) \dots X_N(t)$.
- Action "admissible" $A(t)$.
- Noyau d'évolution : $K(\mathcal{X}(t), A(t))$.

Hypothèse

- Intensité $I(N) \to_{N\to\infty} 0$.
- Objets interchangeables.
- drift : $f(m,a) = \lim_{N\to\infty} \frac{f^N(m,a)}{I(N)}$.

$$f^N(m,a) = \mathbb{E}\left[M^N(t+1) - M^N(t) | M^N(t) = m, A(t) = a\right]$$

Modèle limite : $\frac{\partial m_A(t)}{\partial t} = f(m_A(t), A(t))$

Théorème

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\le T} \left\| M^N(t/I(N)) - m_A(t) \right\| \ge \epsilon\right) \le \frac{J(N,T)}{\epsilon^2} \to 0.$$

Preuve : $M^N(t) - M^N(0) = \underbrace{\sum_{s=1}^{t} f^N(M^N(t), A(t))}_{\text{Methode d'Euler (ODE)}} + \underbrace{\sum_{s=1}^{t} \left(M^N(s+1) - M^N(s) - f^N(M^N, A)\right)}_{\text{martingale}}$

Application du champ moyen

- Régime transitoire – Le système converge sur un temps fini : $\sup_{t\in[0;T]} \left\| M^N(t) - m(t) \right\| \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$

- Régime permanent – si π_N la mesure invariante de M^N et B les points d'accumulation de $\dot{x} = f(x)$, alors le support de π_N se concentre autour de B.
  - Calculer des indices de performance moyens.

- Simulation rapide – (propagation du chaos) le comportement d'un objet devient indépendant des autres.
  - Facile à simuler
  - Calculer des distributions.

- Optimisation
  - On se ramène à optimiser $\int_0^T r(m(t), a(t))dt$

1 Motivation

2 Modèles Champ moyen

3 Applications

4 Conclusion & références

Analyse de performance du vol de travail

- **Contexte** : un cluster d'ordinateurs.
- **Problème** : comment répartir la charge de travail ?

2 types de stratégies

- Push strategies – contrôleur central, spécifique au système/à une application – ex : super calculateurs
- Pull strategies – distribué, adaptatif, . . .– ex : desktop computing

Analyse de performance du vol de travail

- **Contexte** : un cluster d'ordinateurs.
- **Problème** : comment répartir la charge de travail ?

2 types de stratégies

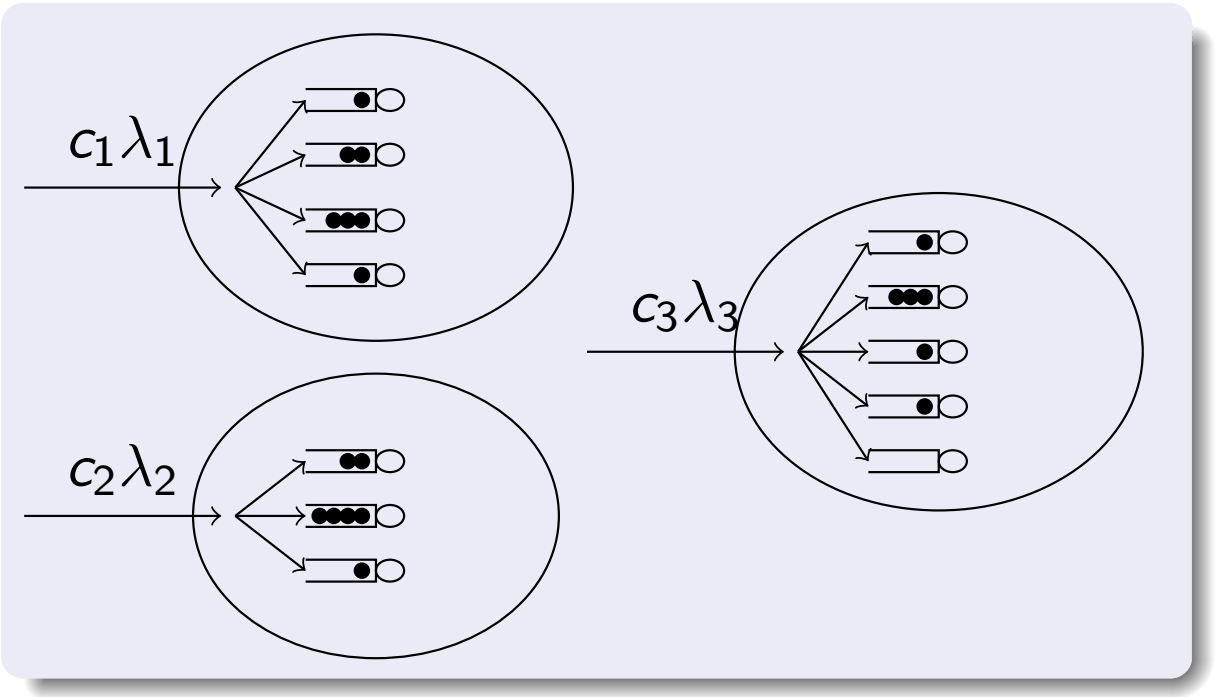
- Push strategies – contrôleur central, spécifique au système/à une application – ex : super calculateurs
- Pull strategies – distribué, adaptatif, . . .– ex : desktop computing

Le vol de travail

- Chaque processeur gère une liste de tâche.
- Un processeur sans tâche vole un autre au hasard.
- Implémentée avec succès (Intel TBB, Cilk, Kaapi,. . .)

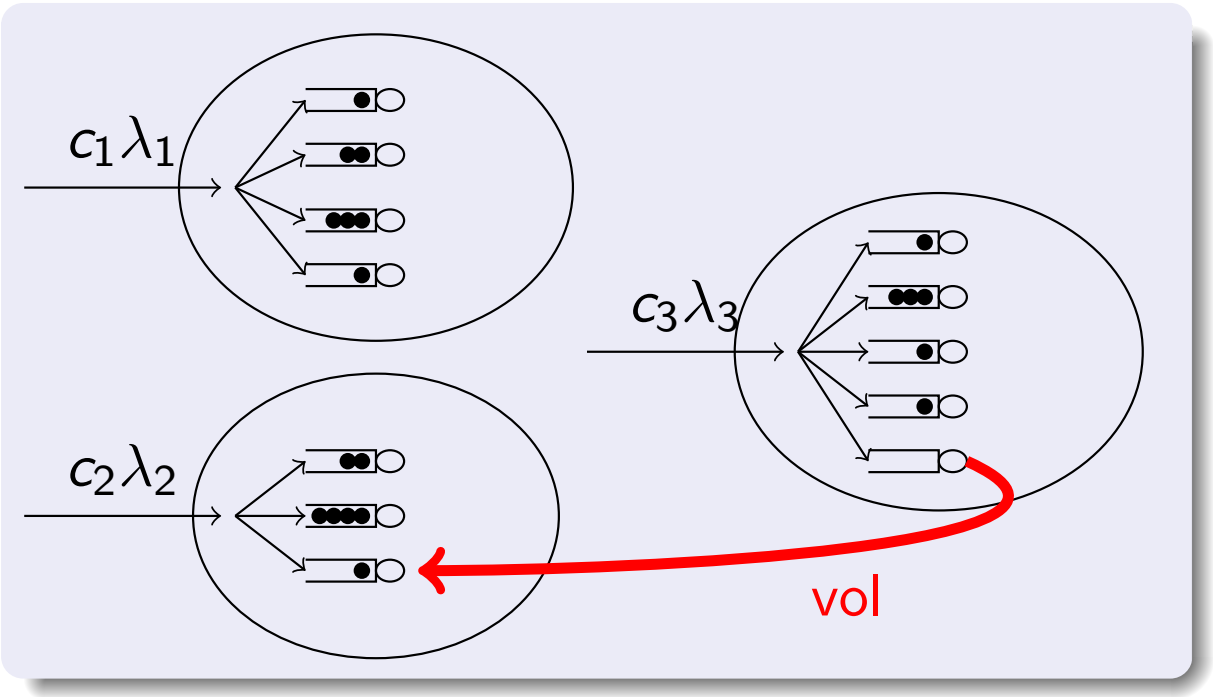
Modèle de vol de travail

- Nombre (fini) de clusters.
- c_i proc dans cluster i.
- Taux d'arrivée dans i : $\lambda_i c_i$.
- Taux de service : μ_i.



Modèle de vol de travail

- Nombre (fini) de clusters.
- c_i proc dans cluster i.
- Taux d'arrivée dans i : $\lambda_i c_i$.
- Taux de service : μ_i.

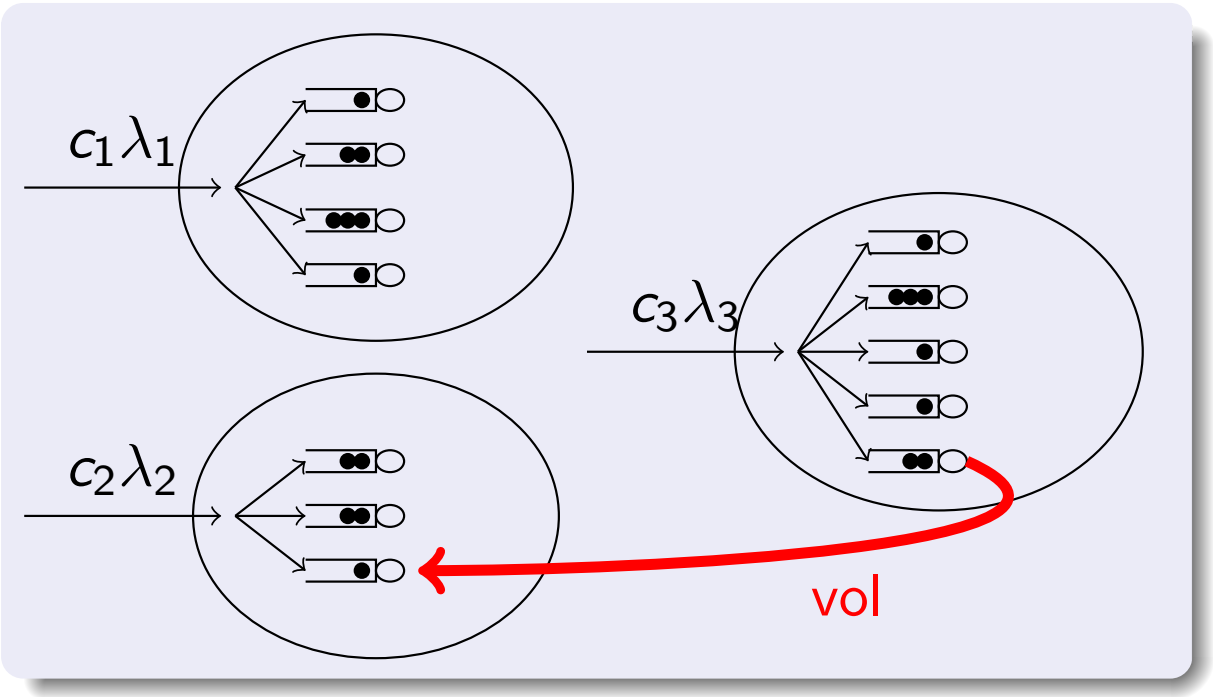


Équilibrage par vol de travail

- choix du cluster
- processeur au hasard dans le cluster.
- Taux $\gamma_{cc'}$ de vol.

Modèle de vol de travail

- Nombre (fini) de clusters.
- c_i proc dans cluster i.
- Taux d'arrivée dans i : $\lambda_i c_i$.
- Taux de service : μ_i.



Équilibrage par vol de travail

- choix du cluster
- processeur au hasard dans le cluster.
- Taux $\gamma_{cc'}$ de vol.

Approche champ moyen

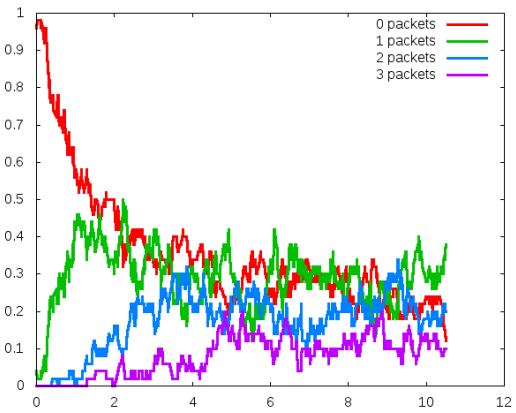
État d'un processeur= nombre de tâches et localisation.

- Approximation champ moyen :
  - Modèle initial :
    - ★ B^N états (B états par proc, N procs).
    - ★ Résolution analytique impossible
    - ★ Résolution numérique difficile.
  - Modèle champ moyen
    - ★ $B * C$ équations différentielle.
    - ★ Résolution analytique parfois possible
    - ★ Résolution numérique facile (régime transitoire ou asymptotique)

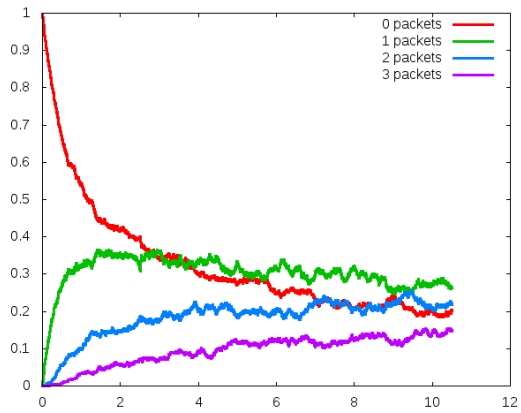
Approche champ moyen

État d'un processeur= nombre de tâches et localisation.

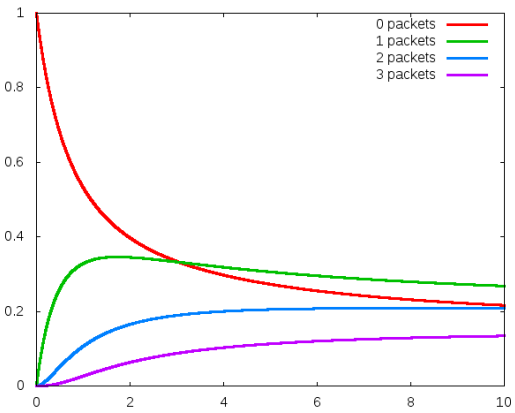
- Approximation champ moyen :
  - Modèle initial :
    - ★ B^N états (B états par proc, N procs).
    - ★ Résolution analytique impossible
    - ★ Résolution numérique difficile.
  - Modèle champ moyen
    - ★ $B * C$ équations différentielle.
    - ★ Résolution analytique parfois possible
    - ★ Résolution numérique facile (régime transitoire ou asymptotique)



50 procs



1000 procs

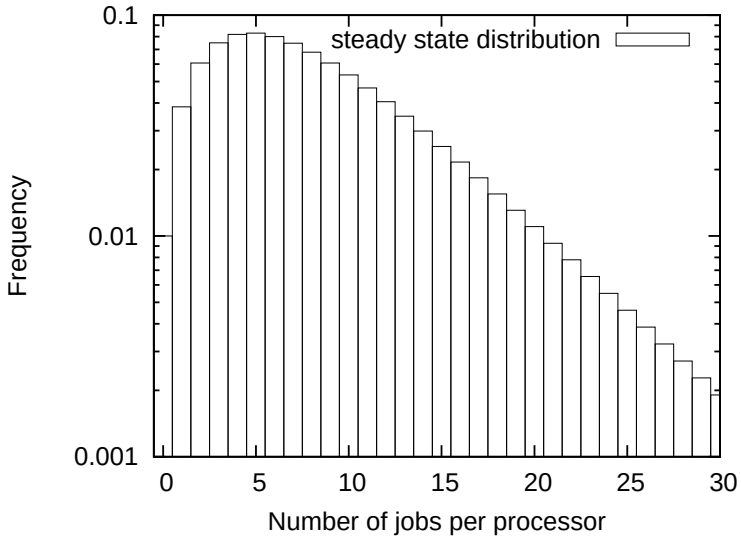


ODE

Quelques résultats : nombre de procs avec j jobs

Étude du régime stationnaire (temps de calcul $<<$ 1s) :

- Proportion de processeurs avec j jobs :



On peut montrer :

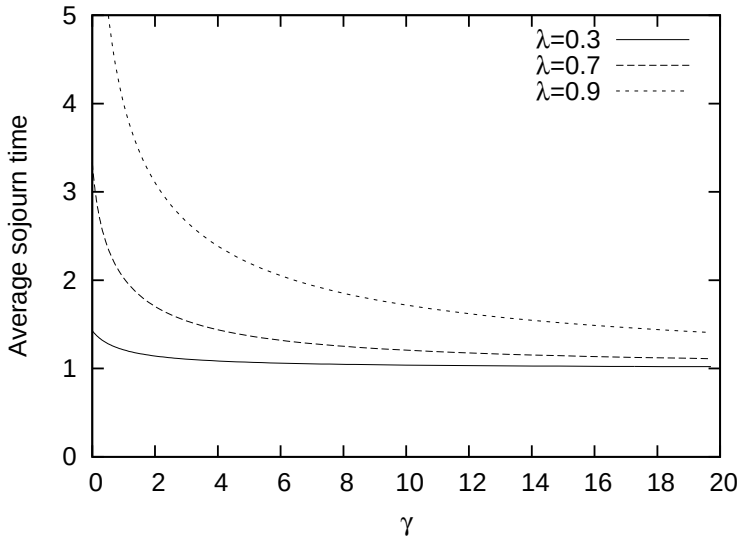
- Forme de la distribution,
- Décroissance en α^j.

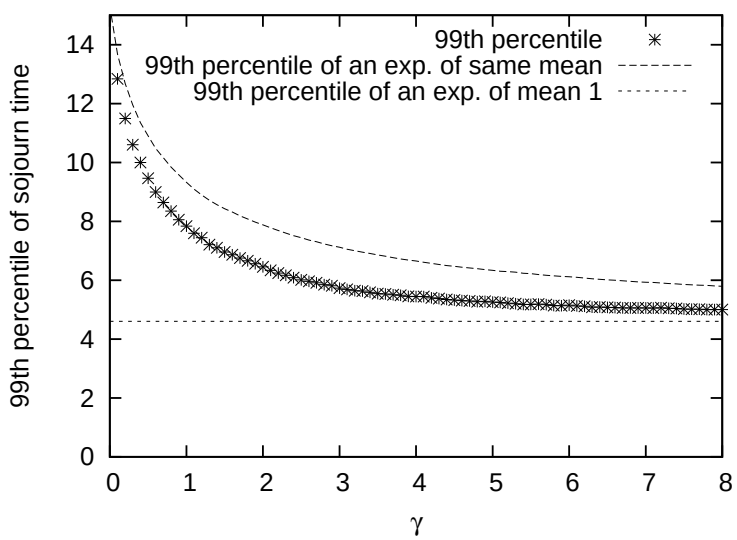
- Temps de réponse moyen en fonction du taux de vol, 99^{ieme} percentile
- Stratégies de vol (plusieurs clusters)

Quelques résultats : nombre de procs avec j jobs

Étude du régime stationnaire (temps de calcul $<<$ 1s) :

- Proportion de processeurs avec j jobs :
- Temps de réponse moyen en fonction du taux de vol, 99^{ieme} percentile





- Stratégies de vol (plusieurs clusters)

Quelques résultats : nombre de procs avec j jobs

Étude du régime stationnaire (temps de calcul $<<$ 1s) :

- Proportion de processeurs avec j jobs :
- Temps de réponse moyen en fonction du taux de vol, 99^{ieme} percentile
- Stratégies de vol (plusieurs clusters)
  - Stratégies probabilistes
    - ★ Dépend de la charge
  - Stratégies Master/Worker

1 Motivation

2 Modèles Champ moyen

3 Applications

4 **Conclusion & références**

Que retenir

- Modèles stochastiques pour l'évaluation et le contrôle de systèmes.
- Problème : le nombre d'états explose.
- Solution : étudier la limite.
  - Solution analytiques
  - Propriétés numériques
  - Accélérer l'étude et la simulation
  - Résoudre des problèmes de contrôle.

Merci de votre attention.

Quelques références

- Optimisation et champ moyen :
  - N. Gast, B. Gaujal – *A Mean Field Approach for Optimization in Particles Systems and Applications* – ValueTools 2009
  - N. Gast, B. Gaujal – *A Mean Field Approach for Optimization in Discrete Time* – (to appear)
  - N. Gast, B. Gaujal, J.-Y. Le Boudec – *Mean field for Markov Decision Processes : from Discrete to Continuous Optimization* – (to appear)
- Modèle de vol de travail :
  - N. Gast, B. Gaujal – *A Mean Field Model of Work Stealing in Large-Scale Systems* – SIGMETRICS 2010
- Un peu sur les modèles champ moyen :
  - T. Kurtz – *Approximation of Population Processes* – Society for Industrial Mathematics, 1981
  - M. Benaïm – *A Dynamical System Approach to Stochastic Approximations* –
  - J.-Y. Le Boudec, M. Benaïm – *A Class Of Mean Field Interaction Models for Computer and Communication Systems* – Performance Evaluation 2009