

Évaluation de Performances

Mesure et Analyse

Florence Perronnin

Université Joseph Fourier, LIG Laboratory

February 9, 2009

Outline

- 1 Analyse des résultats
 - Visualisation
 - Représentation Statistique
 - Intervalles de confiance

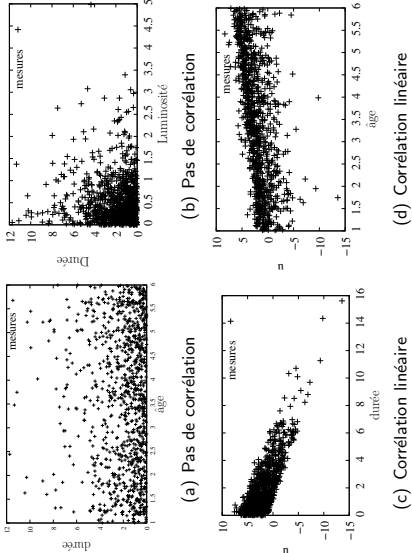
Visualisation

- Nuage de points :
- détection de tendances
 - identification de mesures aberrantes
 - corrélations
- Distribution de probabilité :
- box-plots
 - histogrammes
 - qq-plots

Analyse des résultats

Visualisation

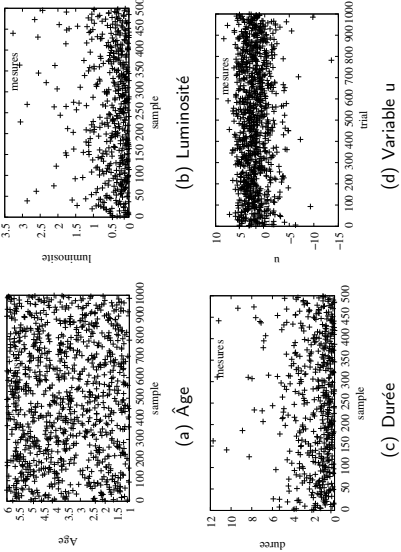
Etude de la corrélation



Analyse des résultats

Visualisation

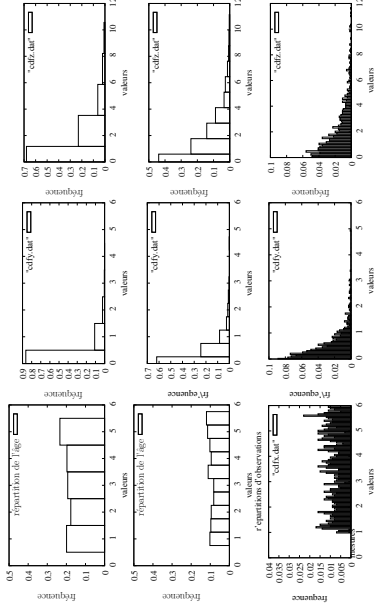
Nuage de points : échantillons séparés



Analyse des résultats

Visualisation

Représentation de la distribution: histogrammes

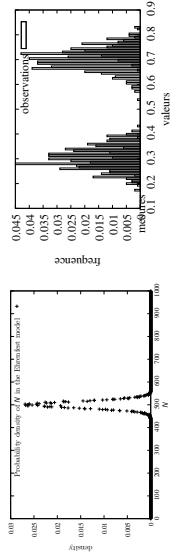


Analyse des résultats

Visualisation

Représentation de la distribution: histogrammes

Autres exemples



(a) Ehrenfest
Figure: Autre visualisations d'histogrammes

- observation des modes
- symétrie (ou non) de la distribution
- écrasement de la courbe
- forme générale de la distribution (exponentielle, uniforme, gaussienne,...)

Indices de tendance centrale

Mode : valeur la plus probable

$$x_i = \operatorname{argmax}_{x_0 \leq i \leq n} (\mathbb{P}[x_i])$$

Moyenne empirique :

$$\bar{X} = \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Médiane : m telle que $P(X \leq m) = \frac{1}{2}$

soit $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[X \leq m]} = \frac{n}{2}$ (50% des observations au-dessous)

α -quantiles ou 100 α -percentile : valeur x_α telle que $\mathbb{P}[X \leq x_\alpha] = \alpha$

soit $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{[X \leq x_\alpha]} = \alpha n$ (100 α % des observations au-dessous)

Moyenne: attention danger!

Signification hasardeuse

En moyenne une femme française a 1,98 enfant(s).

En moyenne, une voiture islandaise a 3 roues motrices.

Variabilité

Le gain moyen par joueur à l'EuroMillions est d'environ 39 euros en 2007.

Autres valeurs possibles^a de gain moyen :

26,4 €	15,15 €	1,10 €	39,08 €	-44 €
/gagnant	hors rang 1	/grille	/joueur/an	$\mathbb{P}[\text{gain}]/\text{joueur/an}$

$\mathbb{P}[\text{grille gagnante}] \approx 4\%$ et $\mathbb{P}[\text{jackpot}] \leq 10^{-6}$

^aSources: données FDJ 2007

Moyenne: attention danger!

Mesures aberrantes

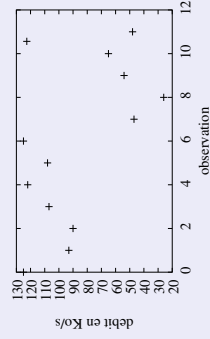
Classe A	Classe B	Classe A	Classe B
13	11	13	11
13	11	13	11
14	12	14	12
15	13	15	13
13	11	13	11
12	12	12	12
14	11	14	11
13	11	13	11
12	10	12	10
0	20	0	20
11,9	12,2	13,2	11,3

Moyenne: attention danger!

Multimodalité

FAI	download (Ko/s)
Alice	125,1
AOL	93,5
CI	90,3
Free	107,0
Noos	122,7
Orange	108,9
Tale2	125,7
AOL	47,9
Cegetel	26,1
Free	54,2
NC	65,0
Neuf	48,7

Débit moyen en download: **84,3 Ko/s** Ne correspond à aucune réalité!



Données^a du 03/02/2009 en Ko/s

^aSource: www.grenouille.com

Moyenne: attention danger!

Ratios

Durée de mesure	Occupation CPU (%)
1	45
1	45
1	45
1	45
100	20

Moyenne 1: $(45+45+45+45+20)/5=40\%$

Moyenne 2: $(45*4+20*100)/104=21\%$

Moyenne : quantités particulières

Rappel

En général,

$$\mathbb{E}[X, Y] \neq \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y]$$

L'égalité a lieu si les variables X et Y sont *indépendantes*.

Autres moyennes possibles :

Moyenne géométrique :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n X_i}$$

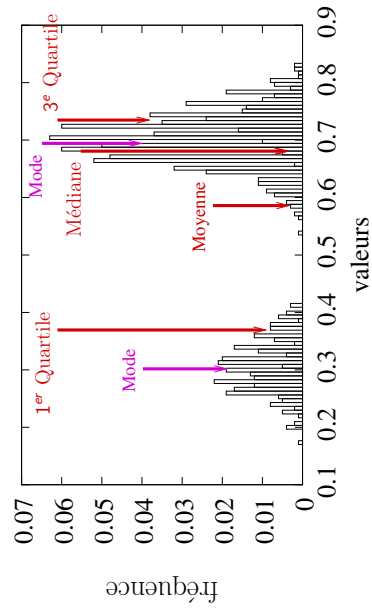
lorsque le cumul des X_i est multiplicatif (ex: pourcentage d'amélioration)

Moyenne harmonique :

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{X_i}}$$

lorsque la moyenne de $\frac{1}{X_i}$ a un sens (ex: débits pour 1 même fichier).

Représentation graphique



Indices de dispersion

Étendue :

$$[X_{min}, X_{max}]$$

écart absolu moyen :

$$\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|$$

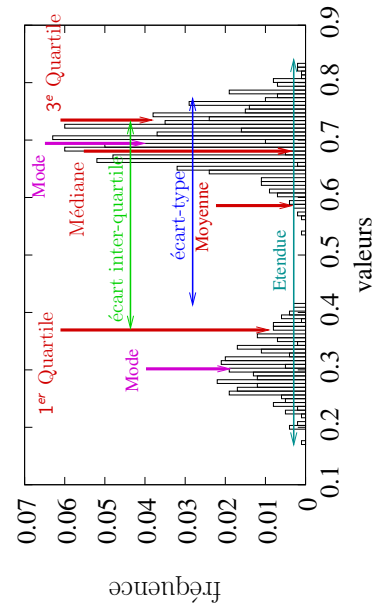
Écart inter-quartile :

$$q_{0.75} - q_{0.25}$$

Variance empirique :

$$s^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Représentation graphique



Intervalles de confiance (Rappels)

Problème

On veut tester si une pièce est truquée. On veut donc calculer $p = \mathbb{P}[\text{pile}]$. On effectue 10 lancers et l'on observe:



Soit 7 *pile* et 3 *face*. Peut-on dire que $p = 0.7$?

Réponse:

- $\mathbb{E}[X] = p$ se trouve dans l'intervalle **[0.41; 0.99]** avec une probabilité de 95%.
- Si la pièce n'était pas truquée, la probabilité d'observer 7 pile en 10 lancers serait 0.12 (loi binômiale).

Problème général

Loi faible des grands nombres

Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite infinie de v.a. indépendantes et de même loi, et possédant un second moment. Alors, pour tout nombre $\epsilon > 0$ fixé on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

Taille de l'échantillon

La fiabilité d'une mesure dépend fortement de la taille de l'échantillon.

Intervalles de confiance

Le but des intervalles de confiance est de **quantifier** la certitude d'une statistique.

Cas d'une variable gaussienne

Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de v.a. indépendantes **normales** de moyenne μ et de variance σ^2 . Alors :

- La variable $\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu, n\sigma^2)$.
- La variable $Z = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$ suit $\mathcal{N}(0, 1)$.

Méthode lorsque la variance σ^2 est connue

- 1 Choisir un niveau de confiance γ (typiquement 95% ou 99%)
- 2 Déterminer le $\frac{1+\gamma}{2}$ quantile c_γ correspondant dans la table $\mathcal{N}(0, 1)$
- 3 L'intervalle de confiance à γ est donné par :

$$\mu \in \left[\bar{X} - \frac{c_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{c_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Preuve

Soit F_X la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$: $F_X(c) = \mathbb{P}[Z \leq c]$.
On cherche k_γ tel que :

$$\begin{aligned} \gamma &= \mathbb{P}[|\bar{X} - \mu| \leq k_\gamma] \\ &= \mathbb{P}\left[|Z| \leq \frac{k_\gamma \sqrt{n}}{\sigma}\right] \quad \text{car } Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \\ &= \mathbb{P}[Z \leq c_\gamma] - \mathbb{P}[Z \leq -c_\gamma] \quad \text{en posant } c_\gamma = \frac{k_\gamma \sigma}{\sqrt{n}} \\ &= F_X(c_\gamma) - F_X(-c_\gamma) \\ &= 2F_X(c_\gamma) - 1 \quad \text{car par symétrie } F_X(c_\gamma) = 1 - F_X(-c_\gamma) \end{aligned}$$

D'où

$$F_X(c_\gamma) = \frac{1 + \gamma}{2}$$

Ainsi, $k_\gamma = \frac{c_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}$ où c_γ est le $\frac{1+\gamma}{2}$ -quantile de $\mathcal{N}(0, 1)$.

Cas d'une variable gaussienne: variance inconnue

Lorsqu'on ne connaît pas a priori la variance σ^2 on peut utiliser la variance empirique $\hat{\sigma}^2$ sous certaines conditions :

- la variable $\frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}} \sqrt{n - 1}$ suit une loi de **Student à $n - 1$** degrés de liberté
- intervalle de confiance plus large pour des échantillons petits (< 100).

Méthode lorsque la variance σ^2 est inconnue

On dispose de la moyenne empirique $\bar{X}$ et de la variance empirique $\hat{\sigma}^2$.

- 1 Choisir un niveau de confiance γ (typiquement 95% ou 99%)
- 2 Déterminer le $\frac{1+\gamma}{2}$ quantile c_γ correspondant dans la table $T(n - 1)$.
- 3 L'intervalle de confiance à γ est donné par :

$$\mu \in \left[\bar{X} - \frac{c_\gamma \hat{\sigma}}{\sqrt{n}}; \bar{X} + \frac{c_\gamma \hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$$

Cas général

Problème

Comment calculer l'intervalle de confiance si la variable X n'est pas gaussienne mais inconnue?

Théorème de la Limite Centrale (TCL)

Soit $\{X_n\}$ une suite de v.a. **i.i.d** telle que $\mathbb{E}[X_n] = \mu$ et $\text{Var}[X_n] = \sigma^2$.
Alors

$$\sqrt{n} \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1) \quad (1)$$

Moralité

Pour un échantillon n **suffisamment grand**, la somme des X_n se comporte comme une gaussienne et l'on peut appliquer la méthode précédente.