Note : ceci est les deux premiers exercices du sujet d'examen 2009. Le troisième demandait de comparer deux échantillon de 10 valeurs (il fallait calculer moyennes, variance pour chaque.

Durée 2 heures. Tous documents autorisés.
Une partie des points tient compte de la clarté et de la présentation des réponses.

Les questions 1.e et 1.f sont facultatives et donneront lieu à des points de bonus.

Exercice 1. Modélisation de voix par processus MMPP

Les sources voix sont ici associées à des applications de type conversation (ex : téléphonie) ou lecture (ex : audio-conférence). On modélise une source voix par un modèle ON/OFF markovien appelé "processus de Poisson modulé par Markov" (MMPP). Une source est dite ON/OFF si son processus d'arrivée admet en alternance deux phases : une phase active (ON) où les clients arrivent selon un processus de Poisson, et une phase inactive (OFF) où les clients n'arrivent pas.

L'objectif de cet exercice est de caractériser ce processus et d'étudier l'aggrégation de plusieurs sources.

On considère tout d'abord la chaîne de Markov en temps continu $\{X(t), t \geq 0\}$ sur l'espace d'états $E = \{0, 1\}$ dont le diagramme est représenté en figure 1. **a. Classification -** Cette chaîne de Markov est-elle ergodique ?

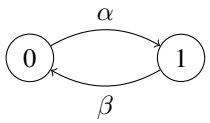

FIG. 1 – Chaîne de Markov à deux états représentant les phases ON/OFF de la source.

Justifiez votre réponse.

b. Comportement asymptotique - Écrire les équations d'équilibre et calculer la distribution stationnaire $\pi = (\pi_0, \pi_1)$.
On considère maintenant le processus d'arrivée de clients suivant :

- les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ tant que la chaîne $\{X(t)\}$ se trouve dans l'état 1.
- aucun client n'arrive tant que la chaîne $\{X(t)\}$ se trouve dans l'état 0.

c. Processus d'arrivées - Soit $A(t)$ le nombre d'arrivées de ce processus à l'instant t. Expliquer pourquoi le processus $\{X(t), A(t)\}$ est une chaîne de Markov à temps continu. Décrire son espace d'état et son diagramme de transition. Cette chaîne est-elle ergodique ?

d. Taux d'arrivée - Quel est le taux *moyen* d'arrivée $\hat{\lambda}$ de ce processus ? Justifier votre raisonnement. Exprimer $\hat{\lambda}$ en fonction de λ, π_0, π_1 puis en fonction de λ, α, β en utilisant votre réponse à la question b.
Soit une file FIFO de capacité infinie avec un seul serveur alimentée par le processus MMPP décrit ci-dessus. On suppose que les temps de service ont une distribution exponentielle de paramètre μ. Soit $Z(t)$ le nombre de clients dans la file à l'instant t.

e. (facultatif) MMPP/M/1 - Justifier pourquoi le processus $\{Z(t), X(t)\}$ est une chaîne de Markov à temps continu sur l'espace d'états $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$.

f. (facultatif) Diagramme MMPP/M/1 - Représenter le diagramme de transition de la chaîne $\{Z(t), X(t)\}$.
On considère maintenant la superposition de K sources ON/OFF indépendantes telles que décrites plus haut. On s'intéresse au processus *global* d'arrivée provenant de l'ensemble de ces K sources.

g. Processus des sources - Soit $N(t)$ le nombre de sources actives (dans l'état 1) à l'instant t. Montrer que $N(t)$ est une chaîne de Markov à temps continu et un processus de naissance et de mort.

h. Distribution stationnaire des sources - Calculer la distribution stationnaire $p^* = (p_0^*, \ldots, p_K^*)$ du processus $\{N(t), t \geq 0\}$.

i. Nombre moyen de sources actives - Calculer le nombre moyen de sources actives en régime stationnaire. (*Indication : On pourra remarquer que les sources sont indépendantes.*)

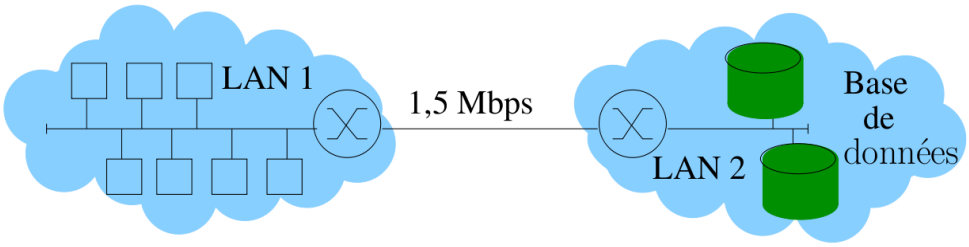

FIG. 2 – Réseau d'entreprise à dimensionner

On suppose désormais que les K sources ON/OFF sont hétérogènes, c'est-à-dire que leurs processus de phases respectifs $X_k(t)$, $1 \leq k \leq K$ ont des paramètres α_k et β_k pouvant varier d'une source à l'autre, et que le taux d'arrivée λ_k en phase active est également distinct d'une source à l'autre. Ces sources évoluent toujours de manière indépendante. $N(t)$ dénote toujours le nombre de sources actives (dans l'état 1) à l'instant t.

j. Nombre de sources hétérogènes - Pourquoi le processus $\{N(t), t \geq 0\}$ n'est-t-il pas une chaîne de Markov ?

k. Processus des sources hétérogènes - Montrer que le processus $\{(X_1, \ldots, X_K(t)), t \geq 0\}$ est une CMTC.

l. Loi stationnaire des sources hétérogènes - Quelles sont les probabilités stationnaires $P(X_1 = x_1, \ldots, X_K = x_K)$ de ce processus ? *(Indication : utiliser l'indépendance des sources.)*

m. Taux global d'arrivée - Calculer le taux global d'arrivée des clients du processus de superposition des sources hétérogènes.

Exercice 2. Dimensionnement de buffer

On considère un réseau d'entreprise à deux sites représenté en figure 2. Ce réseau est composé de deux LANs, l'un constituant le réseau de production (LAN 1) et l'autre hébergeant la base de données de l'entreprise (LAN 2). Ces deux sous-réseaux sont connectés par un lien à $1,5$ **Megabits/seconde.** On suppose que :

- Les requêtes provenant du réseau de production pour la base de données arrivent au routeur d'interconnexion selon un processus de Poisson d'intensité égale à **15 requêtes par seconde.**
- Les documents hébergés par la base de données ont une taille aléatoire de **distribution exponentielle, de moyenne 100 kbits**.
- Les délais de propagation et de traitement sont négligés, de sorte que les temps de transferts de ces documents entre les deux sites sont proportionnels à la taille des documents demandés.
- les temps de traitement par la base de données sont négligés.
- la taille des requêtes est négligeable devant la taille des documents demandés.

a. Modélisation - En supposant les buffers de taille infinie, montrer que le processus d'arrivée des documents au routeur d'interconnexion du LAN 2 vers le LAN 1 peut être modélisé par une file M/M/1. Calculer ses taux d'arrivée et de service.

b. Diagnostic - Le système est-il stable ? Décrivez l'évolution asymptotique du temps de réponse.

On suppose désormais que l'on augmente le débit du lien d'interconnexion à **3 Megabits/seconde**. On veut alors dimensionner le buffer du routeur (mise en attente des requêtes) afin de garantir une probabilité de perte inférieure à 10^{-3}.

c. Modélisation, bis - Montrer que l'on peut modéliser le système par une file M/M/1/K et calculer son intensité ρ. Ce système est-il stable ?

d. Dimensionnement - Calculer la valeur K du buffer telle que la probabilité de perte d'une requête soit inférieure à 10^{-3}.