Séance : Autour de Poisson

Exercice 1. Taux de panne sans usure

On s'intéresse au taux de panne d'une machine. On note X la date à laquelle la machine tombe en panne.

a. On suppose que la machine a une durée de vie tirée selon une loi exponentielle. Montrer que la machine ne s'use pas, c'est à dire $P(X > s + t | X > s) = P(X > t)$ (elle a autant de chance de tomber en panne au bout de $t + s$ secondes sachant qu'elle n'est pas encore tombée en panne au bout de s seconde que de tomber en panne au bout de t secondes).

b. On suppose maintenant la machine sans usure : $P(X > s + t|X > s) = P(X > t)$. Montrer que la durée de vie de la machine est tirée selon une loi exponentielle.

Exercice 2. Paradoxe de l'inspection

Une usine a une machine qui tombe souvent en panne. On nomme un inspecteur pour déterminer la fréquence de panne. Celui-ici vient de temps en temps sur le site, se renseigne sur la date de la dernière panne t_k, attend qu'il se produise une panne t'_k. Au boût de N visites, il en conclut :

"Le temps entre deux panne est environ $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(t'_k - t_k)$."

a. On suppose que les pannes arrivent toutes les heures (selon un processus déterministe). Que vaut dans ce cas la valeur $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(t'_k - t_k)$?

On suppose maintenant que les pannes interviennent selon un processus de poisson. On note t la date d'arrivée de l'inspecteur, t'_k la date de la dernière panne avant t et t_k la date de la première panne après t.

b. Calculer la loi de $t'_k - t$ et la loi de $t - t_k$ (indication : calculer $P(t'_k - t_k > t + x|t'_k - t_k > t)$).

c. Calculer $\mathbb{E}[t'_k - t_k]$

d. Quand N est grand, que vaut $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(t'_k - t_k)$?

e. Que penser de la méthode de l'inspecteur ?

Exercice 3. Convergence vers une loi de Poisson

On considère un clusters composé de N ordinateurs qui effectuent un calcul commun. Chaque ordinateur a une probabilité p/N (indépendamment des autres) de tomber en panne pendant le calcul. On appelle X_N le nombre de pannes qui auront lieu pendant le calcul.

a. Montrer que X_N suit une loi binomiale. Quelle sont ses paramètres ?

b. Montrer que quand N tend vers l'infini, la loi de X_N tend vers une loi de Poisson.

Exercice 4. Superposition de processus de Poisson

Soit X et Y deux processus de poisson indépendant de paramètres λ_1, λ_2.

a. Montrer que si on superpose X et Y, alors on obtient un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

b. Montrer que si chaque évènement de X est choisit avec probabilité $p < 1$, on obtient un processus de Poisson de paramètre $p\lambda_1$.