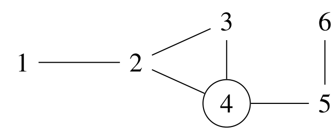
# Chaîne de Markov en temps discrêt : marche aléatoire.

## Exercice 1. Un marcheur perdu

Un homme est déposé par hélicoptère dans un labyrinthe (graphe ci dessous) au point $4$. Pour sortir, il se balade dans le graphe en choisissant au hasard (uniformément) un chemin. On note $X(n)$ sa position à la $n^{\text{ième}}$ étape.




**a.** Pourquoi $X$ est une chaîne de Markov ?

**b.** Donner sa matrice de transition ainsi que son graphe de transition.

**c.** Écrire (sous forme matricielle) la probabilité pour lui d'être dans la position $j$ après $n$ pas.

**d.** On cherche à savoir combien de temps il va passer en moyenne dans chaque position. La chaîne est elle irréductible ? Apériodique ? Calculer sa mesure invariante.

**e.** On suppose que le lien $2-4$ est unidirectionnel. Est-ce que cela va changer radicalement vos résultats (on ne demande pas de calcul) ? Même question avec $4-5$.

On s'intéresse maintenant au mouvement d'un cavalier sur un échiquier : à chaque tour, il choisit un mouvement au hasard uniformément parmis les mouvement possibles.

**f.** Calculer le temps moyen passé dans chaque case.

## Exercice 2. Automate et dénombrement

Soit $X_n$ une suite aléatoire de 0,1 (chaque $X_n$ est choisi indépendamment des autres et vaut 0 avec probabilité $1/2$). On s'intéresse à compter le nombre de fois en moyenne qu'un motif $m$ apparaît dans la suite. On compte les motifs sans répétitions, c'est à dire que $\mathbf{00}01\mathbf{00}0$ contient 2 occurrences de $\mathbf{00}$.

Si $m = m_1 m_2 \ldots m_n$ est de longueur $n$, on peut construire un automate fini à $n+1$ états reconnaissant toutes les occurrences d'un motif $m$, où chaque état représente un préfixe du mot $m$ : les états sont $\epsilon, m_1, m_1 m_2, \ldots, m$. À chaque fois que l'automate arrive dans l'état $m$, cela veut dire qu'il a reconnu une occurrence

**a.** Construire l'automate pour $m = 00$ et $m = 01$.

On considère maintenant la chaîne de Markov correspondant à l'automate précédant dans lequel à chaque état, on choisit au hasard une des deux transition possibles.

**b.** Construire les deux chaînes de Markov correspondant aux motifs $00$ et $01$ et calculer leur mesure invariante.

**c.** On note $c_m(n)$ le nombre d'occurrences de $m$ sur le mot $X_1 \ldots X_n$. Quelles sont les limites de $c_{\mathbf{00}}(n)/n$ et $c_{\mathbf{01}}(n)/n$ ? Cette différence est-elle surprenante ?

**d.** On compte maintenant les motifs *avec répétitions*. Quelles résultats obtenez vous ?