TP2 : simulation équationnelle de la file M/M/1

L'objectif de ce TD est d'analyser les performances d'une file d'attente simple de type $M/M/1$ en fonction du taux de charge.

On utilisera les notations suivantes :
- τ_n est le temps séparant la date d'arrivée du $n-1^{\text{ième}}$ et du $n^{\text{ième}}$ client
- la durée de service du paquet n est notée $\{\sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- on supposera que la discipline de service est FCFS (first come, first serve).

Exercice 1. Méthode équationnelle

On note par A_n la date d'arrivée du $n^{\text{ième}}$ client et D_n la date de son départ.

a. Montrer que si on pose $A_0 = D_0 = 0$, A_n et D_n vérifient l'équation de récurrence suivante pour $n \geq 1$:

$$\begin{cases} A_n &= A_{n-1} + \tau_n \\ D_n &= \max\{A_n, D_{n-1}\} + \sigma_n \end{cases}$$

Exercice 2. Simulateur

On se propose d'écrire un simulateur implémentant les équations ci dessus. Vous avez le choix du langage (C, Java, R,...)

On suppose que le temps de service suit une loi exponentielle de paramètre 1 et le temps séparant deux arrivées une loi exponentielle de paramètre λ : plus λ est grand, plus le système est chargée.

a. Écrire une fonction `expo(lambda)` rendant un nombre aléatoire selon une loi exponentielle de paramètre lambda. On pourra se servir du fait que si U est une variable tirée uniformément sur $[0;1]$, alors $-\frac{1}{\lambda}\log(U)$ est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre λ.

b. Écrire un programme qui vous rend un tableau à 3 dimensions contenant :
- La date d'arrivée du $n$ième paquet.
- son temps de réponse $R_n = D_n - A_n$.
- son temps d'attente $W_n = \max(A_n, D_{n-1}) - A_n$.

Exercice 3. Étude détaillée de la file $M/M/1$

a. Tracer l'évolution du temps de réponse R_n en fonction de la date d'arrivée des paquets pour différentes valeurs de λ (par exemple .2, .5, .8, 1, 2). On observe différents comportements, les décrire.

Quand λ est petit, W_n tend vers un comportement limite. On parle alors de "régime stationnaire".

b. Tracer la distribution du temps de réponse dans le régime stationnaire pour différentes valeurs de λ. À quoi ressemble cette loi ?

c. Écrire une fonction qui prend un paramètre λ et vous rend le temps de réponse moyen $\bar{R}$ en régime stationnaire. Tracer $\bar{R}$ en fonction de λ.

d. En déduira le nombre moyen de clients dans la file à l'état stationnaire (penser à Little).

Exercice 4. File M/GI/1

Afin de rendre l'étude plus complète, on peut remplacer la distribution exponentielle de la durée de service par d'autres lois.

a. Reprendre l'exercice précédant en remplaçant la loi exponentielle par :
- Un temps déterministe (de durée 1) ;
- Une loi Uniforme sur l'intervalle $[0, 2]$.