Calcul de la mesure invariante

Nicolas Gast

RICM 4

1 Quelques notations/rappel

Dans la suite, $(X_n)_n$ représente une chaîne de Markov de matrice de transition P. On suppose que la chaîne à k états et on note $\pi_i(n)$ la probabilité d'être dans l'état i à l'instant n :

$$\pi_i(n) = \mathcal{P}(X_n = i).$$

$\pi(n)$ désigne le vecteur à k composantes composé des $\pi_i(n)$. $\pi(n)$ satisfait la relation de récurrence :

$$\pi(n+1) = \pi(n)P$$

On rappel le résultat suivant :

Théorème 1.
- *Si $(X_n)_n$ est irréductible, il existe un unique π^* tel que $\pi^* = \pi^* P$.*
- *Si $(X_n)_n$ est irréductible et apériodique, alors $\lim_{n\to\infty} \pi(n) = \pi^*$.*

On appelle π^* la mesure invariante*.*

2 Calcul de la mesure invariante

Dans la suite on suppose que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov irréductible et apériodique.

2.1 Par les équations

Si on connaît la matrice P, alors π^* est l'unique solution de l'équation :

$$\pi = \pi P \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{k} \pi_i = 1.$$

Calculer le produit de matrice πP permet d'obtenir un système d'équations.

2.2 Construire les équations depuis le graphe

Si on connaît le graphe de transition, on peut obtenir les équations directement sans passer par la construction de la matrice. La $j$ième composante de πP peut se calculer en

$$(\pi P)_j = \sum_{i=1}^{k} \pi_i P_{ij} = \sum_{i:P_{ij}\neq 0} \pi_i P_{ij}.$$

La dernière partie de l'équation correspond à la somme sur toutes les arêtes entrantes du produit de la probabilité d'être dans l'état i multiplié par P_{ij}.

On obtient exactement l'équation $\pi P = \pi$.

Appliqué à la figure 1, cela donne directement l'équation :

$$\pi_{i-1}a_{i-1} + (1 - a_i - b_i)\pi_i + \pi_{i+1}b_{i+1} = \pi_i$$

Dans ce cas précis, la méthode suivante permet d'obtenir des équations plus simple.

2.3 Autres équations

Soit $I \subset [1;k]$ un sous ensemble d'états. En sommant sur I l'équation $\pi_j = (\pi P)_j$ et en utilisant le faite que $\sum_j P_{ij} = 1$, on obtient :

$$\sum_{i \in I} \pi_i \sum_{j=1}^{k} P_{ij} = \sum_{j \in I} \pi_j \quad = \quad \sum_{j \in I} (\pi P)_j = \sum_{j \in I} \sum_{i=1}^{k} \pi_i P_{ij}$$

En décomposant $\sum_{j=1}^{k}$ en $\sum_{j \in I} + \sum_{j \notin I}$ (même chose pour $\sum_{i=1}^{k}$), on obtient :

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \pi_i P_{ij} + \sum_{i \in I} \sum_{j \notin I} \pi_i P_{ij} \quad = \quad \sum_{j \in I} \sum_{i \in I} \pi_i P_{ij} + \sum_{j \in I} \sum_{i \notin I} \pi_i P_{ij}$$

En supprimant les deux termes égaux, on a

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \notin I} \pi_i P_{ij} \quad = \quad \sum_{j \in I} \sum_{i \notin I} \pi_i P_{ij}. \tag{1}$$

Le terme de gauche correspond à ce qui sort de l'ensemble I, le terme de droite à ce qui rentre dans l'ensemble I depuis l'extérieur.

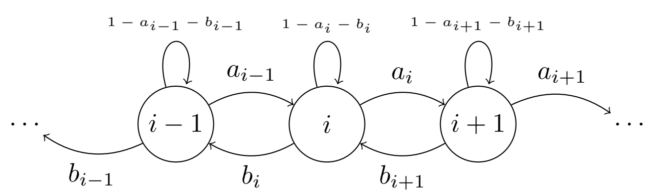

FIG. 1 – Graphe de transition d'une chaîne de Markov dans laquelle partant de i, il n'y a des transitions que vers i, $i-1$ et $i+1$.

En particulier, si les transitions ne vont que de l'état i à $i-1, i$ ou $i+1$ comme à la figure 1, cela permet de simplifier les équations : si les équations sont du type $P_{i,i-1} = b_i$, $P_{i,i} = 1 - a_i - b_i$, $P_{i,i+1} = a_i$ et $P_{ij} = 0$ l'équation (1) permet d'obtenir directement l'équation $\pi_{i+1} = \frac{a_i}{b_{i+1}} \pi_i$. On peut par exemple appliquer ça à la stratégie "Move Ahead" du TD.

3 Conclusion

En pratique pas de miracle, il faut savoir jongler entre les différentes méthodes. La méthode 2.2 marche tout le temps. La méthode 2.3 est surtout à appliquer dans le cas de chaîne qui ont pour états $0, 1, 2 \ldots$ et uniquement des transitions entre i, $i+1$ et $i-1$.