Durée 2 heures.
Tous documents autorisés.
Calculatrice et téléphone portable interdits.
Le barème est *indicatif.*
Les réponses devront toutes être justifiées.
Une partie des points tient compte de la clarté et de la présentation des réponses.
Les problèmes sont indépendants.

1 Aloha discrétisé

On considère le protocole Aloha discrétisé. Dans ce protocole, dérivé d'Aloha, toutes les stations sont connectées par radio sur une unique fréquence. On suppose un grand nombre de stations.

La différence avec le protocole Aloha pur est que, désormais, chaque station ne peut émettre qu'à des instants précis, périodiques, définissant des *time slots*. Chaque station ayant un paquet à émettre à un instant t ne peut donc commencer à émettre qu'au début du time slot suivant.

Lorsque deux ou plusieurs stations émettent dans le même time slot, il y a collision et tous les paquets doivent être réémis.

La durée d'un time slot est supposée égale à la durée de transmission d'un paquet (taille fixe), qui fixera l'unité de temps.

On dénote par p la probabilité de collision.

Question 1. (1 point) Calculez le nombre moyen de retransmissions nécessaires pour transmettre un paquet avec succès.

Le processus d'arrivée des *nouveaux paquets* est supposé suivre un processus de Poisson d'intensité λ.

Question 2. (1 point) Quelle est l'intensité λ' totale du trafic sur le canal radio (paquets et retransmissions) ?

On suppose maintenant que le trafic résultant de la superposition des paquets et retransmissions est encore un processus de Poisson d'intensité λ'.

Question 3. (2 points) Exprimez la probabilité de collision p en fonction de λ'.

Question 4. (1 point) Exprimez le traffic *utile* S en fonction de la charge λ'. Tracez la courbe à main levée. (On donne $1/e = 0.37$).

Question 5. (1 point) Que penser du protocole Aloha discrétisé ?

2 Un serveur Web

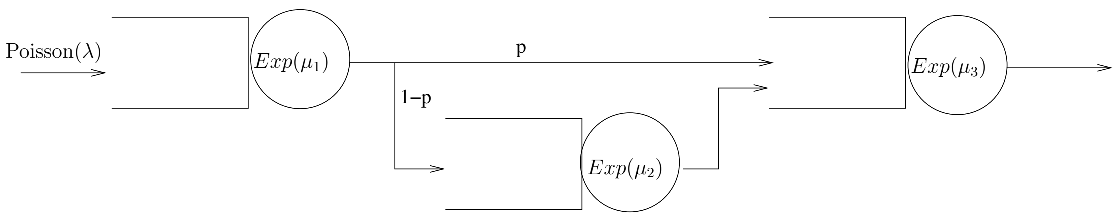
On considère un modèle simplifié de serveur Web :
- Les requêtes pour les fichiers arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ.
- Lors de l'arrivée d'une requête, le serveur regarde d'abord si la page correspondante est chargée en mémoire (dans le cache). Cette opération prend un temps exponentiellement distribué de paramètre μ_1.
- Le fichier est présent dans le cache avec probabilité p, et fait défaut avec probabilité $1 - p$.
- En cas de défaut de cache (fichier absent du cache), le fichier doit être lu sur le disque. Cette opération prend un temps exponentiellement distribué de paramètre μ_2.
- Une fois le fichier lu (sur cache ou sur disque), il est transmis sur le réseau. Cette transmission prend un temps exponentiellement distribué de paramètre μ_3.

On propose dans un premier temps de réaliser un simulateur à événements discrets de ce système.

Question 6. (1 point) Quelle structure d'échéancier recommandez-vous ? Décrivez brièvement son contenu.

Question 7. (1 point) Quel critère d'arrêt proposez-vous pour la simulation ?

On cherche désormais à valider les résultats de la simulation en étudiant analytiquement le comportement asymptotique du système. On modélise le système par le réseau de files d'attentes présenté en Figure 2.



Question 8. (2 points) Le trafic arrivant sur le réseau (i.e., la file 3) est-il poissonnien ? Justifiez votre réponse.

Question 9. (2 points) Pour chaque file $i \in 1, 2, 3$ du réseau de la Figure 2, calculer le taux λ_i d'arrivée des clients à cette file.

Question 10. (1 point) Quelle est la condition de stabilité du système ?

Question 11. (3 points) Calculer le temps de réponse moyen des requêtes.

3 Le réparateur

Une entreprise possède K machines et emploie un unique technicien de maintenance. Chaque machine tombe en panne après un temps exponentiellement distribué selon un paramètre α (taux de panne de chaque machine).

Lorsqu'une panne survient, le technicien est prévenu. Les requêtes pour les réparations sont enregistrées et traitées dans l'ordre d'arrivée. Le temps de réparation est exponentiellement distribué selon un paramètre μ.

Les durée de vie et de panne de chaque machine sont supposées indépendantes.

Soit $X(t)$ le nombre de machines en service à l'instant t.

Question 12. (1 point) Donnez le générateur infinitésimal et le graphe de transitions du processus $X(t)$. Ce processus admet-il un régime stationnaire ? Justifiez votre réponse.

Question 13. (1 point) Quelle file d'attente classique reconnaissez-vous ?

Question 14. (2 points) En utilisant les résultats sur cette file d'attente ou en résolvant les équations d'équilibre (au choix), donnez la distribution stationnaire $\pi(i) = \mathbb{P}(i \text{ machines en service})$ pour $i \in 0, 1, \ldots, K$.