Les matrices

17 avril 2007

On utilisera la bibliothèque d'algèbre linéaire de Maple grace à la commande `with(linalg) ;`

On peut alors définir des vecteurs et des matrices grace aux commandes `vector(n,V)` et `matrix(m,n,M)` où m et n sont les dimensions, et V et M des nombres, des tableaux ou des listes.

Les opérations de bases sont l'addition `M + N`, la multiplication par un scalaire `λ * M`, la multiplication de deux matrices de dimensions compatibles `M &* N`, et les puissances $\mathtt{M}^n$. Le resultat est évalué grace à la fonction `evalm`.

On pourra aussi utiliser les commandes `det`, `trace`, `rank`, `inverse` et `transpose` qui renvoient respectivement le déterminant, la trace, le rang, l'inverse et la transposée d'une matrice.

Les fonctions `kernel` et `colspan` renvoie une base du noyau et de l'image de l'application linéaire associée à la matrice.

Enfin, la commande `linsolve(M,V)` permet de résoudre le système linéaire $M.X = V$.

Exercice 1. Pour commencer

Soient

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Calculer le déterminant et l'inverse de A_1. Calculer le rang, le noyau et l'image de A_2.

b. Mêmes questions pour $A_1 + A_2$, $A_1.A_2$, $A_2.A_1$ et A_2^4.

Exercice 2. Nilpotence

On rappelle qu'une matrice N est nilpotente s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathtt{N}^k = 0$.

a. Si N est une matrice de taille $n \times n$ et k l'entier minimal tel que $\mathtt{N}^k = 0$, peut-on comparer n et k ?

b. Ecrire une procédure qui teste si une matrice est nilpotente.

Exercice 3. Systèmes linéaires

a. Donner une base du sous-espace de $\mathbb{R}^5$ défini par le système d'équation

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2.x_2 & - & x_3 & + & 3.x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & + & x_2 & + & x_3 & - & 2.x_4 & + & 2.x_5 & = & 0 \\ 2.x_1 & + & x_2 & - & 5.x_3 & & & - & 4x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

b. Établir en fonction de λ les solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2.x & + & \lambda.y & - & z & = & 5 \\ (\lambda - 5).x & + & 3.y & + & 7.z & = & 7 \\ x & + & 3.y & + & 2.z & = & 4 \end{array} \right.$$

Exercice 4. Qui commute ?

Soit

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; et \; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Trouver l'ensemble des matrices qui commutent avec C. Quelle est sa dimension ?

Même question pour D.

Soit

$$E = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

b. Trouver les matrices triangulaires supérieures qui commutent avec E.

Exercice 5. $\mathbb{C}$?

Soient

$$I = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \text{ et } J = \begin{bmatrix} & -1 \\ 1 & \end{bmatrix}.$$

a. Calculer J^2. Quelle est la dimension de $\mathrm{Vect}(I, J)$ sur $\mathbb{R}$?

b. A quel espace est-il isomorphe ?

Exercice 6. Quaternions

On pose

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \; J = \begin{bmatrix} & & -1 & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}, \; K = \begin{bmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & -1 & \end{bmatrix} \text{ et } L = \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}.$$

a. Montrer que I, J, K et L engendrent un groupe mutiplicatif fini. Combien a-t-il d'éléments ?

b. Quelle est la dimension de $\mathbb{H} = \mathrm{Vect}(I, J, K, L)$ sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$?

c. Représenter J, K et L avec des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

d. Montrer que les éléments non nuls de $\mathbb{H}$ sont inversibles dans $\mathbb{H}$.

e. Pourquoi n'est-ce pas un corps au sens usuel ?

On l'appelle malgré tout le corps des quaternions.

Exercice 7. Inversion d'une matrice

La méthode du pivot de Gauss (*cf* votre cours de Maths) est une méthode qui permet d'inverser une matrice. Les opérations autorisées pour transformer ce système sont :

- échange de deux lignes.
- multiplication d'une ligne par un nombre non nul.
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

a. A l'aide des fonctions `addrow, addcol, mulrow, mulcol, swaprow, swapcol`, écrire une procédure qui implémente cette méthode et rend l'inverse d'une matrice s'il existe.

b. Réécrire cette procédure sans se servir des fonctions `addrow,...`

c. Quelle est la complexité de cet algorithme ? Pourquoi est-ce préférable à l'utilisation du déterminant ?