

Intégrale et équations différentielles

Nicolas Gast

5 décembre 2005

ATTENTION : pensez à sauvegarder régulièrement votre travail.

Calcul approché d'intégrale

Il est souvent difficile (voir impossible) de calculer une primitive d'une fonction. Par exemple, on ne peut pas exprimer la primitive de $\exp(x^2)$ à l'aide de fonction usuelle. Néanmoins il est souvent indispensable de calculer une valeur approchée de certaines intégrales, pour résoudre certains problèmes physiques par exemple. Voici quelques techniques qui peuvent nous permettre de résoudre ce problème.

Exercice 1. Méthode des rectangles

Pour calculer l'intégrale d'une fonction f entre a et b , une première idée est d'approcher la fonction par une fonction en escalier. Pour celà, on sépare l'intervalle considéré en n parties égales : $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$, $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$ et on considère une fonction g constante sur chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$.

$\forall x \in [a_k, a_{k+1}[$, on peut poser :

$$\begin{cases} g(x) = f(a_k) \\ \text{ou} \\ g(x) = f(a_{k+1}) \\ \text{ou} \\ g(x) = f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) \end{cases}$$

a. Faites trois fonctions `rect_gauche := proc(f,n,a,b)`, `rect_droite` et `rect_milieu` approximant la valeur de l'intégrale.

b. Tester vos fonctions pour les fonctions $\cos(x)$, $1/x$ et $\sin(4/x)$ pour x variant entre 1 et 3 pour différentes valeurs de n et comparer vos résultats à ceux que peuvent donner Maple.

Exercice 2. Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes est une amélioration de la méthode des rectangles ci-dessus mais au lieu de choisir la fonction g constante entre a_k et a_{k+1} , on choisit une fonction affine prenant la valeur $f(a_k)$ en a_k et $f(a_{k+1})$ en a_{k+1} .

a. Montrer que $\forall x \in [a_k, a_{k+1}[$: $g(x) = f(a_k) + \frac{x-a_k}{a_{k+1}-a_k}(f(a_{k+1}) - f(a_k))$

b. Calculer l'intégrale de cette fonction (sur un bout de papier) et en déduire une formule sous forme de somme calculant l'intégrale de la fonction g .

c. Faites une fonction `trap := proc(f,n,a,b)` prenant en argument une fonction, un entier et un intervalle $[a, b]$ et calculant une approximation de l'intégrale à l'aide de la méthode des trapèzes.

d. Tester votre fonction sur les trois exemples de l'exercice précédant.

Exercice 3. Méthode de Simpson

La méthode de Simpson repose sur l'interpolation de la fonction f entre a et b par un polynôme de degré 2. On cherche donc un polynôme passant par $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ et $(b, f(b))$. On sait (voir la méthode d'interpolation de Lagrange par exemple) que ce polynôme est unique.

On détermine ensuite trois réels A,B,C tels que pour tout polynôme de degré au plus 2 on ait $\int_a^b P(x) = A.P(a) + B.P(\frac{a+b}{2}) + C.P(b)$

a. Déterminer les trois coefficients ci dessus (indication : appliquer la formule ci dessus pour les polynômes 1, x et x^2)

b. Par construction, cette formule donne un résultat exacte pour un polynôme de degré 2. Montrer que cette formule est encore valable pour un polynôme de degré 3 (indication : essayer avec x^3).

c. En déduire la formule simple de Simpson :

$$\int_a^b g(x)dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

d. Tester cette formule sur les fonctions $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ entre 0 et 1 $f(x) = \frac{1}{x}$ entre 1 et 3.

On peut améliorer la méthode de Simpson en découpant l'intervalle étudié en n points, $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ et en appliquant la formule en intégrant autour des points a_k , $(a_k + a_{k+1})/2$, a_{k+1} .

e. Trouver une formule appliquant le résultat ci dessus.

f. Faire une fonction qui implémente la formule trouvée et la tester sur les polynômes ci-dessus.

Remarque : on peut montrer que si f est 4 fois dérivable et dont la dérivée 4^{ième} est majorée par M , alors l'erreur comise par la formule en fixant $a_{k+1} - a_k = h$ est majorée par $\frac{Mh^4(b-a)}{2880}$.

Résolution numérique d'une équation différentielle

Exercice 4. La méthode d'Euler

Une équation différentielle est une équation de la forme

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$$

Dans de nombreux cas, il est impossible de trouver une solution exacte à l'équation différentielle et il est donc utile d'utiliser une méthode approchée.

Pour ça, on utilise une *discrétisation de la dérivée*. On approche la dérivée d'une fonction en y par :

$$y'(x) \simeq \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

où h est un nombre "*petit*". On a donc $y(x+h) \simeq y(x) + h.y'$

On constuit ensuite les différentes valeurs de la fonction par récurrence :

$$x_n = x_{n-1} + h \quad (1)$$

$$y_n = y_{n-1} + h.f(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad (2)$$

a. Montrer que ces relations de récurrence correspondent à l'équation différentielle dans laquelle on a discrétisé la dérivée.

Pour visualiser la solution obtenue, il est nécessaire de mettre en mémoire les valeurs de x_n et y_n calculées. On prendra soin de stocker ces valeurs dans deux tableaux X et Y , avec $X[N] = x_n$. Pour tracer la courbe, on utilisera ensuite la commande `plot([seq(X[i], Y[i]], i=1..n))`.

b. Appliquer cette méthode à la résolution de $\frac{\partial y}{\partial x} = -2.x.y$ (resp $\frac{\partial y}{\partial x} = -2.y^2$) et $y(0) = 1$ en faisant varier le pas ($h \sim 0.01$ à 0.0001). Comparer les résultats obtenus à la solution exacte.

La méthode d'Euler se généralise aisément à un système de n équations différentielles du premier ordre (et donc aux équations différentielles d'ordre n).

c. Le système de Lotka-Volterra est un modèle de référence de l'écologie. $F(t)$ représente le nombre de proies (Food) et $P(t)$ représente le nombre de prédateurs présents. Appliquer la méthode d'Euler à la résolution du système et tracer les deux courbes F et P sur un même graphique.

$$\begin{cases} \dot{F} &= \alpha F - \beta FP \\ \dot{P} &= \gamma PF - \delta P \end{cases}$$