Files d'attente et chaîne de Markov en temps continu

Exercice 1. Deux files ou une file ?

On considère les deux situations présentées sur la figure ci dessous. Dans les deux cas, le processus d'arrivée dans le système suit une loi de Poisson de paramètre λ et on dispose de deux serveurs dont le temps de service suit une loi exponentielle de paramètre μ. On cherche à évaluer quelle est la meilleure solution à mettre en place en régime stable (c'est à dire $\lambda < 2\mu$).

La première solution envisagée est d'avoir deux files d'attente et de rediriger un paquet sur deux dans chaque file d'attente. La deuxième est de considérer une unique file d'attente et les deux serveurs se servant dans cette file. Dans les deux cas, la discipline de service est FIFO.

a. Intuitivement, quelle configuration vous semble la meilleure ?

Étude de la première configuration

b1. Montrer que le processus d'arrivée de chaque file suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda/2$.

b2. Écrire la générateur infinitésimal correspondant à une des deux files.

b3. Quel est le nombre moyen de paquets en attente dans le système ?

Étude de la deuxième configuration

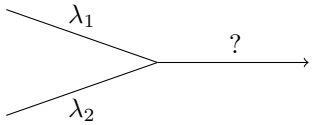
c1. Pourquoi la situation dans laquelle un unique paquet est présent dans la chaîne est-elle particulière ?

c2. Décrire le générateur infinitésimal correspondant au système.

c3. Calculer le nombre moyen de paquets en attente.

c4. Quel est la configuration à préférer : une file ou deux files ? Est-ce conforme à votre intuition ?

Exercice 2. Somme de deux processus de Poisson



Deux files de paquets arrivent dans le système et sont fusionnés en une seule file. On cherce à étudier le processus de sortie sachant que les deux processus d'arrivée sont des processus de Poisson indépendants de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

a. Montrer qu'on obtient en sortie un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$. *On pourra utiliser le fait que le prochain événement d'un processus de Poisson est distribué selon une loi exponentielle.*

b. L'indépendance est importante. Le prouver par un contre-exemple.

Exercice 3. Loi de Little

On considère une file d'attente déterministe en régime stable et on note
- $A(t)$ le nombre de paquets arrivés à l'instant t
- $N(t)$ le nombre de paquets présents dans le système à l'instant t
- $T(t) = \frac{1}{A(t)} \sum_{i=1}^{A(t)} T_i$ où T_i est le temps que reste le i-ième paquet dans le système.

On suppose que $\lim_{t\to\infty} \int_0^t A(x)dx/t = \lambda$, $\lim_{t\to\infty} \int_0^t N(x)dx/t = \bar{N}$ et $\lim T(t) = \bar{T}$

a. En vous appuyant sur un calcul de l'intégrale $N(t)$ de deux façons différentes, montrer la loi de Little :

$$\bar{N} = \lambda \bar{T}$$

On suppose maintenant les processus d'arrivée et de service probabilistes.

b. Montrer que $E[N] = \lambda E[T]$ (*indication :* cela revient à montrer que $E[N] = \bar{N}$ et $E[T] = \bar{T}$).

c. Calculer les temps de séjour, le temps d'attente dans la file $M/M/1$. Même question avec la $M/M/\infty$.