Le retour de la chaîne de Markov
16 novembre 2007

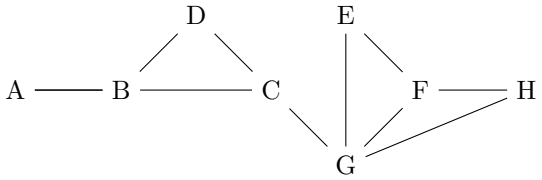
Exercice 1. Réversibilité

Considérons une chaîne de Markov de matrice $P = (p_{ij})_{i,j}$ et soit Π un vecteur tel que

$$p_{ij}\Pi_i = p_{ji}\Pi_j \tag{1}$$

a. Montrer que Π est une solution de l'équation $\Pi = \Pi P$.

Application : on considère un graphe fini et une personne se déplaçant aléatoirement sur ce graphe : si une personne se trouve dans un noeud ayant un degré k (*ie* k arêtes), il en choisit une au hasard (avec probabilité $1/k$ et se déplace sur le noeud en question. On note X_n la position de la personne au temps n.



b. Montrer que X_n est une chaîne de Markov et donner son graphe de transition. Trouver un vecteur Π qui vérifie l'équation 1. En déduire la mesure invariante de l'exemple ci dessus.

c. On choisit un noeud spécial tel qu'à chaque fois que l'on passe dans ce noeud, on gagne 1 euro. Sur l'exemple, comment choisir ce noeud afin de maximiser notre gain et quel est le gain moyen par tour ?

Exercice 2. Marche aléatoire sur Z

On considère une chaîne de Markov sur $\mathbf{Z}$:
$S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$ où $P(X_i = 1) = p$ et $P(X_i = -1) = 1 - p$ $(0 < p < 1)$.

a. Expliquer pourquoi S_n est une chaîne de Markov.

b. On suppose qu'il existe une mesure invariante Π. Trouver une relation entre Π_k, Π_{k+1} et Π_{k-1}.

c. Trouver une solution évidente à cette équation . La chaîne est-elle récurrente positive ?

Exercice 3. Automate et dénombrement

Soit X_n une suite aléatoire de 0,1 (chaque X_n est choisi indépendamment des autres et vaut 0 avec probabilité 1/2). On s'intéresse à compter le nombre de fois en moyenne qu'un motif m apparaît dans la suite. On compte les motifs sans répétitions, c'est à dire que **00**01**00**0 contient 2 occurrences de **00**.

Si $m = m_1 m_2 \dots m_n$ est de longueur n, on peut construire un automate fini à $n + 1$ états reconnaissant toutes les occurrences d'un motif m, où chaque état représente un préfixe du mot m : les états sont $\epsilon, m_1, m_1 m_2, \dots, m$.

a. Construire l'automate pour $m = 00$ et $m = 01$.

On considère maintenant la chaîne de Markov correspondant à l'automate précédant dans lequel à chaque état, on choisit au hasard une des deux transition possibles.

b. Construire les deux chaînes de Markov correspondant aux motifs 00 et 01 et calculer leur mesure invariante.

c. On note $c_m(n)$ le nombre d'occurence de m sur le mot $X_1 \dots X_n$. Quelles sont les limites de $c_{\mathbf{00}}(n)/n$ et $c_{\mathbf{01}}(n)/n$? Cette différence est-elle surprenante ?

Exercice 4. Taille de la file

On considère la file d'attente discrète vue en cours où un paquet arrive chaque seconde et où le nombre de paquets servis est 0,1 ou 2 avec probabilité p_0, p_1 et p_2. On rappelle que dans le cas récurent positif, la mesure invariante est $\Pi_i = (1 - \rho)\rho^i$ où $\rho = p_0/p_2$.

Calculer le nombre de paquets moyens présent dans la file d'attente.