

TD2 - chaînes de Markov

Vendredi 26 octobre 2007

Exercice 1. Un premier exemple : le jeu de pile ou face

On considère deux personnes jouant à pile ou face avec une pièce pipée : à chaque lancer de dé, le joueur 1 gagne 1 euro avec probabilité p et perd 1 euro avec probabilité $1 - p$. On note X_n le gain du joueur 1 à l'instant n et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Les lancers sont supposés indépendants.

- Montrer que S_n est une chaîne de Markov et tracer le graphe correspondant.
- Cette chaîne est-elle irréductible ? Apériodique ?

On suppose qu'à l'instant 0, le joueur 1 a N_1 euros et le joueur 2 a N_2 euros en poche. Le joueur 1 sera donc ruiné si $S_n \leq -N_1$, le joueur 2 sera ruiné si $S_n \geq N_2$. Quand un des deux joueurs est ruiné, le jeu s'arrête.

- Quelle est la probabilité que le joueur 1 soit ruiné ? (*indication* : on pourra noter q_i la probabilité que le joueur 1 soit ruiné sachant que $S_0 = i$ et trouver une relation de la forme $aq_{i+2} + bq_{i+1} + cq_i = 0$).
- Quel est le comportement de q_0 lorsque $N_1 = N_2$ tend vers l'infini ? *Application numérique* : quelle est la probabilité que le joueur 1 soit ruiné si chacun a 20 euros en poche et $p = \frac{2}{3}$? Et si la $p = 0.51$?

Exercice 2. File d'attente discrète

On considère une file d'attente en temps discret : à chaque seconde un paquet arrive dans la file. Le nombre de paquets traités chaque seconde est 0 avec probabilité p_0 , 1 avec probabilité p_1 et 2 avec probabilité p_2 .

Si la file est vide, aucun paquet n'est traité avec probabilité p_0 et 1 avec probabilité $p_1 + p_2$.

On note X_n le nombre de paquets présent dans la file d'attente à l'instant n .

- Montrer que X_n est une chaîne de Markov. Décrire sa matrice et son graphe de transition.
- Cette chaîne est-elle irréductible ? Périodique ? (distinguer plusieurs cas selon les valeurs de p_i).

On s'intéresse maintenant à une généralisation de cette chaîne de Markov dans laquelle l'ensemble des états est $\mathbb{Z}$. La chaîne passe d'un état i à $i + 1$ avec probabilité p_0 , reste en i avec probabilité p_1 et passe en $i - 1$ avec probabilité p_2 .

- Que peut-on dire du comportement de la chaîne de Markov ?

Exercice 3. Quelques propriétés des chaînes irréductibles

Dans les questions **a** et **b**, on considère une chaîne de Markov irréductible ayant un nombre fini d'états et de matrice de transition P .

a. Montrer que si P est apériodique, alors il existe un temps n tel que $\forall i, j : P_{i,j}^n > 0$. Qu'est-ce que cela signifie ? Les conditions irréductibles et apériodiques sont-elles nécessaires (justifier) ?

b. Montrer que si la chaîne est périodique de période d , alors on peut décomposer P^d sous la forme

$$P^d = \begin{pmatrix} A_0 & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{d-1} \end{pmatrix} \text{ où } A_i \text{ correspond à une chaîne de Markov irréductible et apériodique.}$$

- Montrer que les états d'une chaîne de Markov irréductible sont soit tous transients, soit tous récurrents.

Exercice 4. Un peu d'algorithmique

L'étude d'une chaîne de Markov commence souvent par essayer de la décomposer en plusieurs sous chaînes irréductibles indépendantes puis d'étudier la périodicité de chacune des sous-chaînes.

a. Décrire un algorithme décomposant un graphe orienté en ses composantes fortement connexes. (note : si n est le nombre de sommets, on pourra se contenter d'un algorithme en n^2).

- Décrire un algorithme calculant la période d'un graphe fortement connexe.