

Simulation de file d'attente: la file $M/M/1$

Nicolas Gast

Vendredi 6 octobre 2007

La file $M/M/1$ est la file d'attente dans laquelle la date d'arrivée et la durée de service sont données par des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ . Le but de ce td est de simuler le comportement de la taille de la file d'attente pour différentes valeurs de λ et μ . Le langage de programmation est laissé libre.

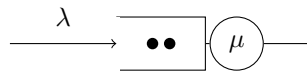


FIG. 1 – File d'attente

On rappelle les grandes lignes de l'algorithme de simulation d'une file d'attente :

Partant de l'état i à l'instant t :

- Pour chaque e_i actif dans l'état i , calculer la date Y_{e_j} du prochain évènement e_j .
Soit $T = \min_{e_j} Y_{e_j}$ et $a = \operatorname{argmin}_{e_j} Y_{e_j}$ l'évènement correspondant.
- Passer dans l'état j avec probabilité $p(i, j, a)$.
- Modifier les Y_{e_j} .
- Recommencer dans l'état j au temps $t + T$.

Exercice 1. Avant d'attaquer

Le cas de la file $M/M/1$ est beaucoup plus simple que le cas général.

- a. Déterminer l'espace des états, et pour chaque état, dire quels événements sont actifs.
- b. Simplifier l'algorithme général en l'appliquant à notre cas particulier.

Exercice 2. Simulation d'une loi exponentielle

Un ordinateur sait généralement tirer un nombre uniformément entre 0 et 1. Dans notre cas, nous voulons tirer une variable aléatoire selon une loi exponentielle de paramètre λ (c'est à dire $P(X \leq x) = f(x) = 1 - e^{-\lambda x}$).

Or dans le cas où f est une fonction inversible dont on connaît l'inverse f^{-1} , si u est tiré uniformément entre 0 et 1, alors $f^{-1}(u)$ est tiré selon la loi f .

- a. Pourquoi ?
- b. Appliquer cette idée à la fonction $f(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ et écrire une fonction qui tire une variable aléatoire selon une loi exponentielle de paramètre λ .

Exercice 3. Simulation de la file

- a. Écrire un programme qui simule une file d'attente $M/M/1$ et qui trace l'évolution de la taille de la file d'attente en fonction du temps.
- b. Faire varier λ et μ . Quels types de comportements peut-on observer ? Est-ce conforme à votre intuition ?