Le joueur le plus faible peut-il gagner ?

Jonatha ANSELMI et Bruno GAUJAL
{jonatha.anselmi,bruno.gaujal}@inria.fr
Univ. Grenoble Alpes, Inria,
CNRS, Grenoble INP, LIG, 38000 Grenoble, France.

21 avril 2026

Résumé

Considérons un jeu à deux joueurs répété N fois. Le joueur 1 peut choisir entre deux styles (dénommés *risqué* ($\mathcal{R}$) et *conservatif* ($\mathcal{C}$)), tandis que le joueur 2 utilise un style unique et fixe. Soit $X_N := \texttt{\#victoires} - \texttt{\#défaites}$ pour le joueur 1 après N parties. Le gain du match est donné par $g_N := \mathbf{E}[\text{sign}(X_N)]$, avec $\text{sign}(0) = 0$. Nous supposons que le joueur 1 est plus faible au sens où chaque style pur est perdant en moyenne. Notre objectif est d'identifier sous quels régimes de paramètres le joueur 1 peut néanmoins obtenir un gain positif sous une politique adaptative optimale.

À l'aide de la programmation dynamique, nous résolvons le problème de contrôle à horizon fini et identifions numériquement des régimes de paramètres dans lesquels le gain optimal est strictement positif pour un certain horizon N. Nous établissons également des conditions structurelles sous lesquelles le gain optimal $g_N^\star$ est toujours négatif, ainsi que des régimes (notamment lorsque $\mathcal{C}$ est équitable) pour lesquels $g_N^\star$ est positif pour tout N. Nous caractérisons ensuite le comportement asymptotique lorsque $N \to \infty$ pour un joueur faible. Dans le cas *sûr*, (où le style conservatif induit un match nul certain) le gain asymptotique varie continûment avec les paramètres et peut prendre toute valeur dans $[0, 1]$. Dans le cas *non sûr*, le gain converge vers -1 lorsque les deux styles sont strictement perdants, et vers 0 lorsque $\mathcal{C}$ est équitable (et non sûr).

1 Introduction

1.1 Un défi entre deux joueurs d'échecs

Nous commençons par une situation simple mais frappante illustrant comment l'adaptabilité peut renverser un désavantage partie par partie, que nous utilisons en cours pour illustrer la puissance de l'approche en ligne des problèmes d'optimisation. Deux joueurs d'échecs s'affrontent de manière répétée, de sorte que les fréquences empiriques de gain–perte sont bien établies. Le joueur 1 peut choisir entre deux styles, $\mathcal{R}$ (risqué) et $\mathcal{C}$ (conservatif), tandis que le joueur 2

utilise un seul style fixe. Quel que soit le choix du joueur 1, le joueur 2 est plus susceptible de gagner. Les résultats des parties sont les suivants :

— Si le joueur 1 joue $\mathcal{R}$, il gagne avec une probabilité de 0.45 et perd avec une probabilité de 0.55 (pas de partie nulle).

— Si le joueur 1 joue $\mathcal{C}$, il gagne avec une probabilité de 0.10, perd avec une probabilité de 0.15, et fait match nul avec une probabilité de 0.75.

Le score d'une partie pour le joueur 1 est de $+1$ pour une victoire (V) et de -1 pour une défaite (D), et son gain espéré sur une partie est $g_1 := \mathbf{P}(V) - \mathbf{P}(D)$.

Ainsi, le joueur 1 est plus faible sous les deux styles : $g_1^{\mathcal{R}} = -0.10$ et $g_1^{\mathcal{C}} = -0.05$. Malgré cela, le joueur 1 défie le joueur 2 sur un match en deux parties et nous demandons :

Faut-il parier sur une victoire du joueur 1 ou du joueur 2 ?

Toutes les stratégies non adaptatives sur deux parties, c'est-à-dire ($\mathcal{R}$,$\mathcal{R}$), ($\mathcal{R}$,$\mathcal{C}$), ($\mathcal{C}$,$\mathcal{R}$), et ($\mathcal{C}$,$\mathcal{C}$) ont un gain espéré strictement négatif, et même pire que pour une seule partie. Pourtant, le joueur 1 peut obtenir un gain espéré positif avec une règle *adaptative* : jouer $\mathcal{R}$ à la partie 1, puis pour la partie 2, jouer $\mathcal{C}$ si la partie 1 était une victoire (V), et $\mathcal{R}$ si la première partie est une défaite (D). Une énumération exhaustive des résultats possibles du match en deux parties donne le gain espéré

$$\begin{aligned} g_2 &= \mathbf{P}(\mathrm{V}\cdot\mathrm{V}) + \mathbf{P}(\mathrm{V}\cdot\mathrm{Nul}) - \mathbf{P}(\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}) \\ &= 0.45\cdot 0.10 + 0.45\cdot 0.75 - 0.55\cdot 0.55 \\ &= 0.08. \end{aligned}$$

Noter que les résultats avec un nul à la partie 1 sont impossibles car la partie 1 est jouée en style $\mathcal{R}$. Cet exemple illustre un mécanisme général : même si chaque style pur est perdant en espérance, un choix de styles dépendant de l'état sur un horizon fini peut donner un gain espéré positif. Dans cet article, nous étudions un modèle plus général cet effet.

1.2 Modèle et problème abordé

Nous formalisons l'exemple précédent comme un jeu répété à horizon fini entre deux joueurs de forces inégales. Le joueur 2 joue un seul style fixe tout au long du match. À chaque partie, le joueur 1 choisit l'un des deux styles : $\mathcal{R}$ (risqué) ou $\mathcal{C}$ (conservatif). Conditionnellement au style choisi par le joueur 1 au tour n, le résultat du tour est indépendant des parties passées. Sous le style $\mathcal{R}$, la distribution des résultats est $\mathbf{p} = (p_v, p_e, p_d)$, avec $p_v + p_e + p_d = 1$, où p_v (resp. p_e, p_d) est la probabilité que le résultat d'une partie soit une victoire (resp. une égalité ou une défaite). Sous le style $\mathcal{C}$, la distribution est $\mathbf{q} = (q_v, q_e, q_d)$, avec $q_v + q_e + q_d = 1$.

Les dénominations *risqué* et *conservatif* pour qualifier les deux styles de jeu sont une simple convention. Le nom *conservatif* est attribué au deuxième style car les matchs nuls seront supposés plus probables sous $\mathcal{C}$ que sous $\mathcal{R}$: on suppose par la suite que $q_e \geq p_e$. Nous utiliserons aussi la terminologie suivante.

Definition 1. *Le joueur 1 est* faible *si chaque style est perdant en espérance, c'est-à-dire,* $p_v \leq p_d$ *et* $q_v \leq q_d$*, et* strictement faible *si les deux inégalités sont strictes.*

Definition 2. *Le style* $\mathcal{C}$ *est* sûr *si* $q_e = 1$ *et* équitable mais non sûr *si* $q_v = q_d$ *et* $q_e < 1$*.*

L'exemple de la Section 1.1 expose l'effet central : malgré une faiblesse stricte sous les deux styles, un choix adaptatif sur plusieurs tours peut donner un gain espéré positif. Le match se joue sur N parties. Un objectif naturel est le signe de la différence de score final : le joueur 1 « gagne le match » si le nombre de victoires dépasse le nombre de défaites, « perd » sinon, et fait match nul si les deux sont égaux. Sous ce critère, la question pertinente n'est pas de savoir si le joueur 1 peut surpasser le joueur 2 en espérance sur une seule partie (il ne le peut pas), mais si une alternance entre les styles au cours du temps peut biaiser la *distribution* du score final suffisamment pour produire un gain positif.

Soient V_n et D_n le nombre de victoires et de défaites du joueur 1 après $n \leq N$ parties, et soit le *score* $X_n := V_n - D_n$. Nous évaluons le *gain espéré* à la fin du match via

$$g_N := \mathbf{E}[\mathrm{sign}(X_N)]\,, \qquad \text{avec } \mathrm{sign}(0) = 0.$$

Ainsi, $g_N > 0$ signifie que le joueur 1 a un avantage espéré positif selon le critère du nombre victoires supérieur au nombre de défaites. La question centrale est de savoir si, et pour quels régimes de paramètres, le joueur 1 peut atteindre $g_N > 0$ en sélectionnant $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{C}$ de manière adaptative en fonction du score, même si les deux styles purs sont défavorables.

Les démonstrations des résultats suivants ne sont pas détaillées. Elles combinent des arguments de marche aléatoire, de programmation dynamique à horizon fini et d'estimations de martingales asymptotiques. Nous renvoyons le lecteur à [1] pour les détails de nos preuves.

2 Travaux connexes

Le phénomène introduit à la Section 1.1, à savoir que la combinaison ou l'alternance entre des modes de jeu individuellement défavorables peut améliorer la performance, est étroitement lié au *paradoxe de Parrondo* [5, 7], initialement introduit dans le contexte des jeux de hasard. Dans sa formulation canonique, deux jeux markoviens (ou chaînes de Markov) qui sont perdants pris isolément (dérive négative) peuvent engendrer un gain moyen à long terme positif (une dérive asymptotique positive) lorsqu'ils sont alternés ou mélangés. Cela s'explique par le fait que la dérive à chaque étape dépend de l'état : l'alternance entre les jeux modifie les fréquences d'occupation des états et peut ainsi inverser la dérive moyenne.

Le paradoxe de Parrondo a trouvé des applications dans de nombreuses disciplines, notamment en physique, en biologie et en finance ; voir [6] pour une synthèse. L'effet s'étend également au-delà du cadre à deux jeux : des variantes

comportant trois jeux perdants ou plus peuvent encore produire un résultat gagnant sous des schémas d'alternance appropriés [2]. Au-delà des mélanges aléatoires ou périodiques, l'ordonnancement optimal à horizon fini et les règles de sélection adaptatives ont également été étudiés, généralement via l'induction arrière ou la programmation dynamique [3, 2].

Notre modèle partage ce mécanisme de haut niveau, à savoir un changement dépendant de l'état entre deux styles de jeu. En ce sens, notre cadre est de type parrondien : deux modes individuellement perdants peuvent produire un résultat positif sous alternance, mais ici l'effet est motivé par un contrôle adaptatif à horizon fini sous un critère non linéaire. En effet, dans cet article, nous distinguons le style conservatif *sûr* (gel du score) du style conservatif *non sûr*. Cette distinction gouverne le comportement à long terme : elle permet une classification asymptotique complète pour les joueurs faibles et identifie les régimes où des politiques de type *catenaccio* sont essentiellement optimales. De plus, contrairement aux travaux mentionnés ci-dessus, notre approche n'est pas de nature algorithmique. Nous nous intéressons aux conditions structurelles sur les paramètres d'entrée sous lesquelles un joueur plus faible peut (ou non) obtenir un gain positif.

3 Le *Catenaccio*

Si le joueur 1 utilise un seul style (disons $\mathcal{C}$), le score du match évolue comme une marche aléatoire unidimensionnelle (paresseuse) et la probabilité que le joueur 1 gagne un match de N parties sous $\mathcal{C}$ est (voir, par exemple, [4])

$$\mathbf{P}(X_N > 0) = \sum_{i>j\geq 0, i+j\leq N} \binom{N}{i}\binom{N-i}{j} q_v^i q_d^j q_e^{N-i-j}, \tag{1}$$

où i (resp. j) compte les victoires (resp. les défaites) et les $N-i-j$ tours restants sont des nuls. Par conséquent, si $q_v < q_d$, alors $\mathbf{P}(X_N > 0) < 1/2$, le gain est négatif pour tout N, $g_N^{\mathcal{C}} < 0$ et tend vers -1 lorsque N tend vers l'infini.

D'autre part, avec deux styles disponibles, une politique naturelle utilisée par les équipes plus faibles dans plusieurs sports (dont le foot) consiste à rechercher un avantage tôt dans le match en prenant des risques, puis à « protéger l'avantage » une fois en tête. Nous modélisons cela par la politique *catenaccio* :

Jouer $\mathcal{R}$ jusqu'à ce que le score devienne positif, puis jouer $\mathcal{C}$ par la suite.

Formellement, soit $\tau := \inf\{n \geq 0 : \ X_n = +1\}$. Le catenaccio devient : jouer $\mathcal{R}$ jusqu'au temps τ et $\mathcal{C}$ après.

3.1 Style conservatif sûr : un gain asymptotique positif

Lorsque le style convervatif $\mathcal{C}$ est sûr, le gain espéré du joueur 1 sous la politique catenaccio converge vers $2p_v/p_d - 1$ lorsque N tend vers l'infini. Ainsi, il est positif si et seulement si $p_v \geq p_d/2$. Ceci est énoncé dans le résultat suivant.

Theorem 1. *Si $q_e = 1$, alors* $g_N^{(\mathrm{cat})} \xrightarrow[N\to\infty]{} 2p_v/p_d - 1$.

La démontration repose sur la théorie classique de la ruine (voir [4, p. 272]).

3.2 Style conservatif équitable mais non sûr : gain asymptotique négatif

Supposons maintenant que le style conservatif $\mathcal{C}$ soit équitable mais non sûr, ce qui signifie $q_v = q_d > 0$. Intuitivement, une fois que le catenaccio passe à $\mathcal{C}$, le score continue de fluctuer et finit par oublier l'avantage initial sur le long terme. Le résultat suivant montre que le gain espéré du joueur 1 sous la politique catenaccio devient toujours négatif.

Theorem 2. *Si $q_v = q_d > 0$,* $g_N^{(\mathrm{cat})} \xrightarrow[N\to\infty]{} p_v/p_d - 1 < 0$.

Ici la démonstration utilise le théorème central limite pour effacer le gain eventuel de catenaccio après sa phase offensive. Par conséquent, lorsque la défense est simplement équitable mais non sûre, la dynamique « après basculement » efface asymptotiquement l'avantage, de sorte que le catenaccio ne produit que des bénéfices transitoires à horizon fini et finit par perdre si le nombre de partie augmente. Par la suite, on se propose de vérifier si ce phénomène est général ou propre au catenaccio.

4 Au-delà du *catenaccio* : politiques optimales et programmation dynamique

La politique *catenaccio* constitue un point de référence utile, mais elle n'est généralement pas optimale. En particulier, lorsque $\mathcal{C}$ est équitable, nous verrons que la politique *optimale* peut donner un gain positif pour chaque horizon et peut être strictement positive pour un N fini même lorsque le joueur 1 est faible. Cette section aborde le problème de décision :

> *Étant donnés* $\mathbf{p}$ *et* $\mathbf{q}$*, existe-t-il un horizon N tel que le joueur 1 puisse atteindre $g_N(\mathbf{p}, \mathbf{q}) > 0$ sous une politique optimale ?*

4.1 Calcul d'une politique optimale

Pour un horizon N fixé, le problème est un processus de décision markovien à horizon fini sur le score X_n. Nous codons le résultat du match par la fonction de valeur terminale

$$V_N^N(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Pour $0 \le n \le N-1$, soit $V_n^N(x)$ la valeur optimale au temps n lorsque le score actuel est x. La récursion d'optimalité de Bellman s'écrit : pour tout $n \ge 0$ et $x \in \{-n, \dots, n\}$,

$$V_n^N(x) = \max\Big\{ p_v V_{n+1}^N(x+1) + p_e V_{n+1}^N(x) + p_d V_{n+1}^N(x-1), \\ q_v V_{n+1}^N(x+1) + q_e V_{n+1}^N(x) + q_d V_{n+1}^N(x-1) \Big\}. \quad (2)$$

Le gain optimal est la valeur à l'origine :

$$g_N^\star = V_0^N(0).$$

Dans certains cas, nous marquons la dépendance à $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ en notant le gain $g_N^*(\mathbf{p}, \mathbf{q})$. Le calcul par induction arrière induit par (2) est illustré dans la Figure 1.

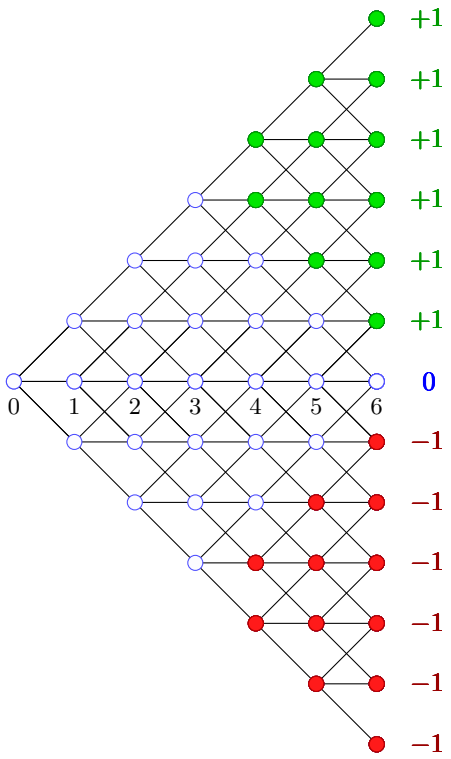

FIGURE 1 – Calcul par induction de $g_N^* = V_0^N(0)$ pour $N = 6$. Les valeurs terminales sont $\text{sign}(X_6)$. Les noeuds colorés sont des scores à partir desquels une victoire (resp. défaite) est déjà forcée. Leurs valeurs sont donc $+1$ ou -1 selon leur position par rapport à l'axe central.

Les points de la grille (n, x) représentés en couleur n'ont pas besoin d'être évalués. Les nœuds colorés avec un score positif ont une valeur de $+1$ (à partir de ces états, le joueur 1 ne peut pas perdre, quelles que soient les actions futures),

tandis que les nœuds colorés avec une score négatif ont une valeur de -1 (le joueur 1 ne peut pas gagner). Cette remarque élimine environ la moitié des états à traiter dans la récursion arrière. Plus précisément, on passe de N^2 à $\lceil \frac{(N+1)^2}{2} \rceil$ calculs.

4.2 Propriétés du gain optimal

Les solutions de (2) révèlent deux effets non intuitifs : (i) g_N^* peut être *non monotone* en N ; (ii) l'action optimale dépend fortement de l'horizon. La Figure 2 illustre ce phénomène pour des paramètres strictement perdants $p_v = 0.46, p_e = 0, p_d = 0.55$ et $q_v = 0.08, q_e = 0.72, q_d = 0.20$, où le gain optimal est positif pour plusieurs valeurs de N (et maximal pour $N^* = 2$) mais pas pour tous les horizons finis.

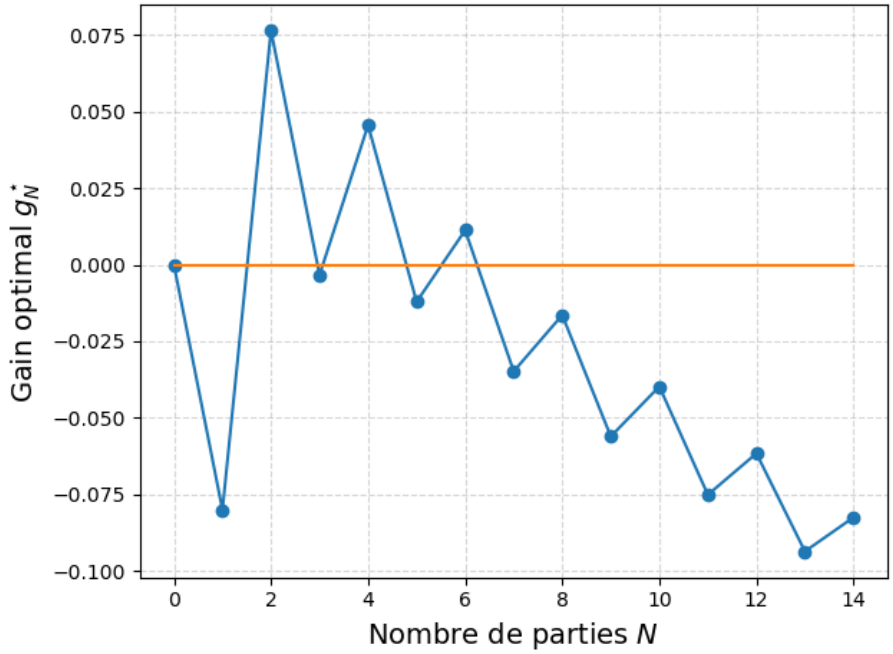

FIGURE 2 – Gain optimal g_N^* sous les paramètres strictement perdants $(p_v, p_e, p_d) = (0.46, 0, 0.54)$ et $(q_v, q_e, q_d) = (0.08, 0.72, 0.20)$.

Identifier l'horizon optimal N^* en fonction de $(p_v, p_e, p_d, q_v, q_e, q_d)$ semble délicat car N^* peut être grand lorsque les deux styles ne sont que légèrement perdants. Par exemple, avec $(p_v, p_e, p_d) = (0.49, 0, 0.51)$ et $(q_v, q_e, q_d) = (0.02, 0.95, 0.03)$, nous obtenons $N^* = 32$ et $g_{32}^* \approx 0.453$. Il n'est pas difficile de montrer que N^*, le nombre optimal de parties, peut croître jusqu'à l'infini en rendant $\mathcal{C}$

de plus en plus sûr (voir Section 5).

Par conséquent, décider si un joueur faible peut atteindre $g_N^* > 0$ pour un certain horizon N est non trivial. On peut en revanche donner des propriétés de g_N^* dans certains cas. Ainsi, lorsque les matches nuls sont rares, les horizons impairs donnent souvent un gain plus faible que l'horizon pair précédent. La proposition suivante formalise ce désavantage des horizons impairs sans match nul. Notez que ce n'est pas vrai en général : lorsque $p_e = 0$ mais $q_e > 0$, il est possible de construire un exemple où $g_{2N+1}^* > g_{2N}^*$ (par exemple, en prenant $\mathbf{p} = (0.4, 0, 0.6)$, $\mathbf{q} = (0.14, 0.71, 0.15)$, on a $0.033 \approx g_3^* > g_2^* \approx 0.022$).

Proposition 1. *Si $p_e = q_e = 0$, alors $g_{2N+1}^* \leq g_{2N}^*$.*

La démonstration repose sur le fait que la valeur $V_{2N}^{2N+1}(x)$ est inférieure à la valeur $V_{2N}^{2N}(x) = sgn(x)$ pour tout x atteignable.

Rappelons que, sans perte de généralité, depuis le début, nous supposons $p_e \leq q_e$ (les nuls sont plus probables en jouant $\mathcal{C}$). Notez que cela implique $q_v \leq p_d$ dans le cas d'un joueur faible.

Considérons deux stratégies conservatives avec des probabilités différentes, notées $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ avec $\mathbf{q}' = (q'_v, q'_e, q'_d)$. Nous disons que $\mathcal{C}'$ *domine* $\mathcal{C}$ si les probabilités correspondantes sont ordonnées stochastiquement : $\mathbf{q} \leq_{st} \mathbf{q}'$; cela signifie simplement $q_v \leq q'_v$ et $q_d \geq q'_d$. Il devrait être clair que le gain sous $\mathcal{C}'$ est meilleur que le gain sous $\mathcal{C}$.

Lemma 1. *Si $\mathbf{q} \leq_{st} \mathbf{q}'$, alors $g_N^\star(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq g_N^\star(\mathbf{p}, \mathbf{q}')$.*

La preuve se fait par induction arrière sur N. Ce lemme se traduit par des résultats négatifs pour le gain, donnés dans la proposition suivante.

Proposition 2. *Considérons un joueur faible. Alors :*

(i) Si $q_d \geq p_v$, alors pour tout $N \geq 1$, $g_N^\star \leq 0$.

(ii) Si $q_v = q_d$ ($\mathcal{C}$ est équitable), alors le gain est positif : $g_N^\star \geq 0$. Si de plus $q_v = q_d < p_v$ ($\mathcal{C}$ ne domine pas $\mathcal{R}$), alors $g_N^\star > 0$, pour tout $N \geq 2$.

Démonstration. Preuve de (i) : Soit $\mathcal{C}'$ avec les probabilités $q'_v := \max\{q_v, p_v\}$, $q'_d := \min\{q_d, p_d\}$ and $q'_e := 1 - q'_v - q'_d$. Par définition, $\mathcal{C}'$ domine $\mathcal{C}$. Par le Lemme 1, $g_N^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq g_N^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}')$. Par construction, $\mathbf{q}'$ domine aussi $\mathbf{p}$, donc $g_N^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq g_N^*(\mathbf{p}, \mathbf{q}') \leq g_N^*(\mathbf{q}', \mathbf{q}')$.

Ce dernier gain est facile à analyser (une seule stratégie est utilisée). Le gain de $\mathcal{C}'$ sur une partie est $g_1^{\mathcal{C}'} = q'_v - q'_d = \max\{q_v, p_v\} - \min\{q_d, p_d\} \leq 0$ car $q_d \geq p_v$ et $q_v \leq q_d$. Pour tout $N \geq 1$, la probabilité $\mathbf{P}(X_N > 0)$ est toujours inférieure à $1/2$ (voir la formule (1)), donc le gain est négatif.

Preuve de (ii) : Puisque $\mathcal{C}$ est équitable, jouer $\mathcal{C}$ tout le temps donnera un gain nul par symétrie, d'où $g_N^\star \geq 0$. De plus, lorsque $q_v = q_d < p_v$, la politique optimale utilise $\mathcal{R}$ après la partie $N-1$ dans l'état $X_{N-1} = -1$, de sorte que le gain sous la politique optimale est strictement meilleur que sous la politique qui utilise toujours $\mathcal{C}$: $g_N^\star > 0$.

Ce dernier point montre également qu'en général, si aucun style de jeu ne domine l'autre, alors le gain associé à la politique optimale est strictement supérieur à celui obtenu en adoptant un style fixe. □

La proposition précédente a des conséquences intéressantes. En particulier, si le nul n'est pas possible ($p_e = q_e = 0$), alors le gain est toujours négatif pour un joueur strictement faible. Cela peut aussi être compris du côté positif : Lorsque le joueur est strictement faible, la seule configuration où son gain a une chance d'être positif est lorsque $q_v < q_d \leq p_v < p_d$, bien que cela ne soit pas suffisant pour garantir un gain positif.

5 Comportement asymptotique

Contrairement au cas à horizon fini, le comportement asymptotique lorsque $N \to \infty$ admet une classification complète sous l'hypothèse du joueur faible. Si le risque $\mathcal{R}$ et la défense $\mathcal{C}$ sont tous deux strictement perdants, le match est finalement perdu avec une probabilité écrasante et $g_N^* \to -1$. Si le style conservatif $\mathcal{C}$ est équilibrée mais non-sûr, alors $g_N^\star \geq 0$ pour tout N (en jouant toujours $\mathcal{C}$), mais $g_N^* \to 0$. Enfin, si $\mathcal{C}$ est sûr ($q_e = 1$), alors $g_N^\star$ est croissant en N et converge vers le gain du catenaccio, qui est donc asymptotiquement optimal dans ce cas.

Proposition 3. *Considérons un joueur faible. Alors :*
(i) Si $p_v < p_d$ et $q_v < q_d$, alors $g_N^* \to -1$.
(ii) Si $p_v < p_d$ et $q_v = q_d > 0$, alors pour tout N, $g_N^* \geq 0$ et $g_N^* \to 0$.
(iii) Si $p_v < p_d$ et $q_e = 1$, alors

$$g_N^\star \xrightarrow[N\to\infty]{} \max\left(0, 2\frac{p_v}{p_d} - 1\right).$$

La démonstration du point (i) repose sur une inégalité de concentration de Azuma–Hoeffding pour les supermartingales. Le point (ii) est plus délicat et repose sur l'analyse du nombre de fois où la stratégie $\mathcal{R}$ a été choisie. Le point (iii) se fait en montrant que la politique optimale utilise les mêmes actions que catenaccio, sauf en un nombre fini de scores, de probabilités négligeables.

6 Conclusion

Cet article identifie les régimes dans lesquels un joueur apparemment plus faible peut néanmoins obtenir une issue positive en alternant entre deux styles de jeu. L'avantage optimal peut être non-monotone par rapport au nombre de jeux, et la positivité peut n'apparaître qu'à certains horizons spécifiques. Nous fournissons aussi une classification complète à long terme pour les joueurs faibles qui montrent que sur le long terme les effets de moyennes s'imposent et le joueur faible finit par perdre (sauf s'il peut figer le score).

7 Seconde conclusion

Pour conclure sur une note sociologique, plusieurs études comportementales suggèrent que la défaite d'un joueur apparemment plus fort peut générer une

frustration susceptible de dégénérer en comportement agressif. Dans de telles situations, la stratégie la plus sage pour l'autre joueur pourrait être celle suggérée par C-3PO à R2-D2 lors d'une partie d'échecs holographique contre Chewbacca : *"Laisse gagner le Wookiee !"*

Références

[1] J. Anselmi and B. Gaujal. Can a weaker player win ? Adaptive play in repeated games. Submitted manuscript, 2026.

[2] P. Arena, S. Fazzino, L. Fortuna, and P. Maniscalco. Game theory and non-linear dynamics : the parrondo paradox case study. *Chaos, Solitons & Fractals*, 17(2) :545–555, 2003.

[3] L. Dinis. Optimal sequence for Parrondo games. *Physical Review E*, 77(2) :021124, 2008.

[4] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications, Vol. 1.* John Wiley and Sons, 3rd edition edition, 1968.

[5] G. Harmer and D. Abbott. Losing strategies can win by parrondo's paradox. *Nature*, 402(864), 1999.

[6] J. W. Lai and K. H. Cheong. Parrondo's paradox from classical to quantum : A review. *Nonlinear Dynamics*, 100(1) :849–861, 2020.

[7] J. M. R. Parrondo, G. P. Harmer, and D. Abbott. New paradoxical games based on brownian ratchets. *Physical Review Letters*, 85(24) :5226–5229, 2000.