

## Aide mémoire sur la file $M/M/1$

On considère une file d'attente simple avec 1 serveur. On suppose que le processus d'arrivée est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Les temps de services sont supposés indépendants de même loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .



FIG. 1 – File  $M/M/1$

Le processus aléatoire  $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ , nombre de clients dans la file à l'instant  $t$  est un processus de Markov en temps continu à valeur dans  $\mathbb{N}$ .

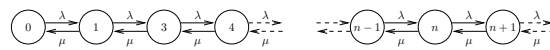


FIG. 2 – Graphe d'état associé au processus  $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  associé à la file  $M/M/1$ .

**Charge** On définit la charge de la file par  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ . La file est stable si et seulement si  $\rho < 1$ .

$$\text{Taux d'utilisation du serveur} = \rho$$

**Distribution stationnaire** Soit  $\pi_n$  la probabilité stationnaire d'avoir  $n$  clients dans la file lorsque celle-ci est stable.

$$\pi_n = (1 - \rho)\rho^n$$

**Nombre moyen de clients** Soit  $\bar{N}$  le nombre moyen de clients dans la file à l'état stationnaire.

$$\bar{N} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

**Temps moyen de réponse** Soit  $W$  le temps de réponse d'un client à l'état stationnaire. Pour une file FIFO,  $W$  est de loi exponentielle de paramètre  $\mu - \lambda$ . Dans le cas d'une discipline de service quelconque on applique la formule de Little  $\bar{N} = \lambda \bar{W}$ .

$$\bar{W} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

**Dépassement de capacité** Soit  $D(\rho, K)$  la probabilité de dépasser  $K$  clients dans la file à l'état stationnaire (approximation du taux de perte pour une capacité  $K$  grande).

$$D(\rho, K) = \rho^K$$

**Période d'activité** Soit  $\bar{B}$  la durée moyenne d'activité du serveur.

$$\bar{B} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

## Aide mémoire sur la file $M/M/1/C$

On considère une file d'attente simple avec 1 serveur et une capacité  $C$ . Les hypothèses sont les mêmes que pour la file  $M/M/1$ , un client arrivant et trouvant la file pleine est rejeté.

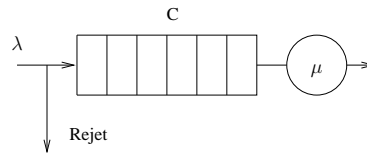


FIG. 3 – File  $M/M/1/C$

Le processus aléatoire  $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ , nombre de clients dans la file à l'instant  $t$  est un processus de Markov en temps continu à valeur dans  $\{0, 1, \dots, C\}$ .

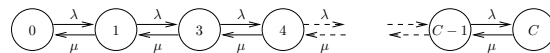


FIG. 4 – Graphe d'état associé au processus  $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  associé à la file  $M/M/1/C$ .

**Charge** On définit la charge de la file par  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ . La file sera toujours stable.

$$\text{Taux d'utilisation du serveur} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{C+1}}$$

**Distribution stationnaire** Soit  $\pi_n$  la probabilité stationnaire d'avoir  $n$  clients dans la file lorsque celle-ci est stable.

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{C+1}} \rho^n & \text{pour } 0 \leq n \leq C \text{ et } \lambda \neq \mu, \\ \frac{1}{C+1} & \text{pour } 0 \leq n \leq C \text{ si } \lambda = \mu. \end{cases}$$

**Nombre moyen de clients** Soit  $\bar{N}$  le nombre moyen de clients dans la file à l'état stationnaire.

$$\bar{N} = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} \frac{1-(C+1)\rho^C + C\rho^{C+1}}{1-\rho^{C+1}} & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ \frac{C}{2} & \text{si } \lambda = \mu. \end{cases}$$

**Temps moyen de réponse** Soit  $W$  le temps de réponse d'un client à l'état stationnaire. Pour une file FIFO,  $W$  est composée de lois exponentielles de transformée de Laplace, ici pour  $\lambda \neq \mu$  :

$$\mathcal{L}_W(t) = \mathbb{E}e^{-tW} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{C+1}} \frac{\mu}{t + \mu} \frac{1 - \frac{\lambda}{t + \mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{t + \mu}\right)^{C+1}}.$$

Pour le temps de réponse moyen on peut également utiliser la formule de Little.

**Saturation** La probabilité que le système soit plein, c'est également la probabilité de rejet d'un client

$$\mathbb{P}(\text{Saturation}) = \pi_C = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{C+1}}\rho^C & \text{pour } 0 \leq n \leq C \text{ et } \lambda \neq \mu, \\ \frac{1}{C+1} & \text{pour } 0 \leq n \leq C \text{ si } \lambda = \mu. \end{cases}$$

**Convergence vers le régime stationnaire** En ce qui concerne le comportement transitoire, on étudie le spectre du générateur infinitésimal  $Q$

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice  $Q$  sont

$$\alpha_i = -(\lambda + \mu) \pm 2\sqrt{\lambda\mu} \cos\left(\frac{k\pi}{C}\right).$$