

## ALGO5 - Travaux dirigés

### Calcul de coût

## 1 Comparaison d'échelle

### Exercice 1. Valeurs numériques

1. Comparer les valeurs de  $2^n$  et  $n^3$  pour  $n = 1, 2, 3, 4, 10, 20$ . Pour quelle valeur de  $n$  ces fonctions sont-elles (presques) égales ?
2. Comparer les valeurs de  $\log_2(n)$  et  $\sqrt{n}$  pour les 6 premières valeurs de  $n$  qui sont des carrés de puissances de 2.
3. Tracer sur une même figure les courbes des fonctions  $n^3$ ,  $\log_2(n)$  et  $\sqrt{n}$ .

### Exercice 2. Ordres de grandeur

1. Soient les fonctions  $f$  et  $g$  suivantes :

$$(a) \quad f(n) = n^2 + 100000 \quad g(n) = n^3$$

$$(b) \quad f(n) = n^2 \times 100000 \quad g(n) = n^3$$

Tracer les courbes de  $f$  et  $g$  dans les 2 cas. Pour quelle valeur de  $n$  se coupent-elles ? Que vaut  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$  ?

2. Soient  $f(n) = n^3 + n^2$  et  $g(n) = n^3$ . Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) - g(n)$ .

3. Montrer  $\forall a, b, c$  :

$$\log_a c = O(\log_b c)$$

et

$$\log_b c = O(\log_a c)$$

## 2 Analyse de programmes simples

### Exercice 3. Itérations emboîtées

Evaluer le nombre des additions exécutées par chacun des algorithmes suivants :

1.
  - (1) pour  $i = 1$  à  $n$  faire
  - (2)     pour  $j = 1$  à  $n$  faire
  - (3)          $x := x+a$
2.
  - (1) pour  $i = 1$  à  $n$  faire
  - (2)     pour  $j = 1$  à  $i$  faire
  - (3)          $x := x+a$
3.
  - (1) pour  $i$  de 5 à  $n-5$  faire
  - (2)     pour  $j$  de  $i-5$  à  $i+5$  faire
  - (3)          $x := x+a$
4.
  - (1) pour  $i = 1$  à  $n$  faire
  - (2)     pour  $j = 1$  à  $i$  faire
  - (3)         pour  $k = 1$  à  $j$  faire
  - (4)              $x := x+a$

## Exercice 4. Recherche séquentielle

On étudie un algorithme de recherche séquentielle dans une table. On se place dans le cas où il n'y a pas d'hypothèse sur le fait que la table est ordonnée ni sur la présence de l'élément cherché dans la table.

Il s'agit d'évaluer le nombre de comparaisons effectuées lors d'une recherche d'un élément  $x$  dans une table  $T$  de taille  $n$ .

- Considérer d'abord les cas favorables et défavorables.
- On prend pour hypothèse que la probabilité pour que  $x$  soit dans  $T$  est  $p$ , et que, dans le cas où  $x$  est dans  $T$ , la probabilité qu'il soit en position  $i$  est  $1/n$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ .  
Quelle est la probabilité, lors d'une exécution de l'algorithme, d'observer le coût minimal, le coût maximal ?
- Faire l'analyse en moyenne.

## 3 Coût maximal, coût minimal. Coût moyen (analyse probabiliste)

### Exercice 5

*Le coût d'une séquence d'instructions dépend en général des valeurs de certaines variables du programme. Le coût maximal (respectivement minimal) est la plus grande (respectivement plus petite) valeur du coût qui puisse être observée lors d'une exécution de cette séquence. Le coût moyen est la moyenne des valeurs du coût, chacune de ces valeurs étant pondérée par sa probabilité d'être observée dans les conditions de l'expérience. Le calcul du coût moyen (sauf dans le cas trivial où le coût maximal est égal au coût minimal) nécessite donc toujours de faire des hypothèses (probabilistes) sur les valeurs de certaines variables du programme.*

Soit l'algorithme suivant :

- (1) pour  $i$  de de 1 à  $n$  faire
- (2)     si  $T[i] > a$  alors
- (3)          $s := s + T[i]$

Evaluer le nombre d'additions exécutées par cet algorithme :

- Considérer d'abord les cas favorables (coût minimal) et défavorables (coût maximal).
- Faire l'analyse en moyenne, en prenant pour hypothèse que la probabilité pour que le test  $T[i] > a$  soit vrai est  $1/2$ .

### Exercice 6

- (1) si  $a > b$  alors
- (2)     pour  $i = 1$  à  $n$  faire
- (3)          $x := x+a$
- (4) sinon  $x := b$

Evaluer le nombre d'additions exécutées par cet algorithme (en fonction de  $a$  et  $b$ ) :

- Considérer d'abord les cas favorables (coût minimal) et défavorables (coût maximal).
- Faire l'analyse en moyenne, en prenant pour hypothèse que la probabilité pour que le test  $a > b$  soit vrai est  $1/2$ .  
Peut-on observer le résultat obtenu, lors d'une exécution particulière de l'algorithme ?
- Faire l'analyse en moyenne, en prenant pour hypothèse que la probabilité pour que le test  $a > b$  soit vrai est  $3/4$ .