Prénom	Nom	N° de table

INFO4 : Probabilités et Simulation – Examen (7 janvier 2020)

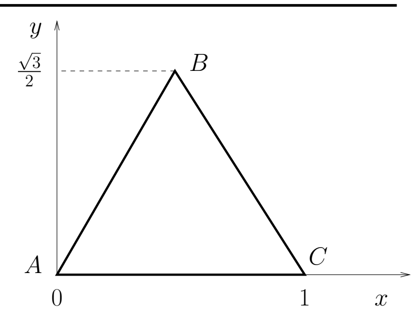
Vous privilégierez l'utilisation du langage `R` pour décrire vos algorithmes même si ça ne sera pas considéré comme rédhibitoire.

Les questions les plus "techniques" sont la Q1.3 (méthode 2) et la Q2.3.

Exercice 1 : Génération

▶ **Q1.1. Jeu de rôle** Vous vous aprêtiez à vous engagez dans une partie de Donjons et Dragons avec des amis lorsque vous réalisez que vous avez oublié vos dés à 20 faces et que vous n'avez à votre disposition que les deux dés à 6 faces du vieux Monopoly de votre petit frère.
Proposer un algorithme de génération d'un dé à 20 faces à partir du lancer de vos dé à 6 faces. Le justifier et évaluer son coût.

▶ **Q1.2. Génération dans un triangle équilatéral** Étant donné un triangle équilatéral (A, B, C), proposer **deux** méthodes de génération uniforme d'un point à l'intérieur de ce triangle, les justifier et calculer leur coût.



▶ **Q1.3. Tirage ordonné** On propose les **deux** méthodes suivantes pour tirer "uniformément" des nombres A_1 et A_2 tels que $0 \leqslant A_1 < A_2 \leqslant 1$.

```
N=10000;
X1=runif(N)    ; X2=runif(N);
A1=pmin(X1,X2) ; A2=pmax(X1,X2);
mean(A1)
```

```
[1] 0.3304377
```

```
N=10000;
A2=runif(N);
A1=runif(N, max=A2);
mean(A1)
```

```
[1] 0.2504245
```

Établir la loi de A_1 et calculer son espérance pour chacune des **deux méthodes**.

Indice pour la première méthode : faire un dessin

Indice pour la deuxième méthode :

— Calculer $\mathbb{P}[A_1 \in [x, x + dx]$ et $A_2 \in [u, u + du]]$ en fonction de dx, u et du et intégrer pour obtenir que $\mathbb{P}[A_1 \in [x, x + dx]] = -\ln(x)dx$.

— Avec une intégration par partie, on a : $\int 1.\ln(x) = [x.\ln(x)] - \int x.\frac{1}{x}$ et $\int x.\ln(x) = [\frac{x^2}{2}.\ln(x)] - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}$.

▶ **Q1.4. Intervalle de confiance** Dans la question précédente, donner un l'intervalle de confiance à 95% pour l'estimation de l'espérance de A_1 effectuée avec $N = 10000$.

Indice : On ne demande pas un calcul précis de la variance, une borne supérieure suffira.

Exercice 2 : Autour de la loi exponentielle

> "Chaque atome radioactif possède une durée de vie X qui suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Le paramètre λ s'appelle alors la constante de désintégration. La durée de vie moyenne λ s'appelle le temps caractéristique. La loi des grands nombres permet de dire que la concentration d'atomes radioactifs va suivre la même loi. La médiane correspond au temps moyen T nécessaire pour que la population passe à 50% de sa population initiale et s'appelle la demi-vie ou période."
>
> (Extrait de Wikipédia).

On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ si $f_X(x) = \lambda.e^{-\lambda.x}$ pour $x \geqslant 0$.

▶ **Q2.1. Demi-vie** Calculer la demi-vie de l'élément radioactif en fonction de λ.

▶ **Q2.2. La jeunesse de Dory** Prouver que $\forall t > 0, u > 0, \mathbb{P}[X > t + u | X > t] = \mathbb{P}[X > u]$. Pourquoi dit-on que cette durée de vie est *sans vieillissement* ? (On dit aussi que l'exponentielle est *sans mémoire*.)

▶ **Q2.3. Unicité** Prouver qu'une loi sans mémoire est nécessairement exponentielle.
Indice : On supposera que $(t \to \mathbb{P}[X > t])$ est dérivable partout et on montrera que $\frac{\mathbb{P}[X>t+dt]-\mathbb{P}[X>t]}{dt} = -\lambda.\mathbb{P}[X > t]$ en utilisant le fait que $\mathbb{P}[X \leqslant dt] \approx \lambda.dt$ quand on définit $-\lambda$ comme dérivée de $(t \to \mathbb{P}[X \leqslant t])$ en 0.

Exercice 3 : Multiplexage Statistique

Une entreprise a décidé d'investir dans un nouveau logiciel scientifique, performant mais coûteux. L'administrateur système souhaite donc calculer le nombre de licences réellement nécessaires. L'entreprise emploie 100 ingénieurs concernés. Des mesures préliminaires avec la version de test suggèrent que les utilisateurs utilisent le logiciel environ 10% de leur temps, de façon indépendante.

▶ **Q3.1. Modélisation** Modéliser les accès des utilisateurs et calculer la loi du nombre d'utilisateurs simultanés. Donner l'espérance et la variance du nombre d'utilisateurs simultanés

---

▶ **Q3.2. À l'aide du Théorème Central Limite**

1. Si l'entreprise achète 20 licences, quelle est la probabilité qu'un ingénieur trouve tous les jetons occupés alors qu'il en a besoin ?
2. Si les utilisateurs utilisaient ce logiciel 20% de leur temps, combien de licence recommanderiez-vous d'acheter (vous préciserez la probabilité de non-épuisement de jetons que vous souhaitez atteindre) ?

Indice : Voici les probabilités, si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ que $\mathbb{P}[X \leqslant t]$ pour $t = 0, 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, \ldots, 3.90, 3.94, 4.00$. Alternativement, vous pourrez écrire l'appel de fonction `R` permettant d'obtenir la valeur désirée.

```r
options(digits=4);pnorm(seq(from=0,to=4,by=.05),mean=0,sd=1)
```

```
 [1] 0.5000 0.5199 0.5398 0.5596 0.5793 0.5987 0.6179 0.6368 0.6554 0.6736
[11] 0.6915 0.7088 0.7257 0.7422 0.7580 0.7734 0.7881 0.8023 0.8159 0.8289
[21] 0.8413 0.8531 0.8643 0.8749 0.8849 0.8944 0.9032 0.9115 0.9192 0.9265
[31] 0.9332 0.9394 0.9452 0.9505 0.9554 0.9599 0.9641 0.9678 0.9713 0.9744
[41] 0.9772 0.9798 0.9821 0.9842 0.9861 0.9878 0.9893 0.9906 0.9918 0.9929
[51] 0.9938 0.9946 0.9953 0.9960 0.9965 0.9970 0.9974 0.9978 0.9981 0.9984
[61] 0.9987 0.9989 0.9990 0.9992 0.9993 0.9994 0.9995 0.9996 0.9997 0.9997
[71] 0.9998 0.9998 0.9998 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999 0.9999 1.0000 1.0000
[81] 1.0000
```
