5.2 Primitives usuelles

Trouver des primitives revient à effectuer l'opération inverse de la dérivation. Du tableau donnant les dérivées des fonctions usuelles, on déduit donc un tableau de primitives usuelles.

$f(x)$	$F(x)$
e^x	$e^x + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$x^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$

Exemple 17. *Soit* $f(x) = 3x^2 - 1/x + 2e^x$. *Une primitive de* f *est*

$$F(x) = x^3 - \ln|x| + 2e^x$$

et toutes les primitives de f *sont de la forme* $G(x) = x^3 - \ln|x| + 2e^x + c$ *avec* $c \in \mathbb{R}$. *De plus,*

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(t)dt &= F(2) - F(1) = G(2) - G(1) = [x^3 - \ln|x| + 2e^x]_1^2 \\ &= (8-1) - (\ln 2 - \ln 1) + 2(e^2 - e^1) = 7 - \ln 2 + 2e^2 - 2e. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de dérivation d'une fonction composée, on déduit du tableau précédent des primitives plus générales, valides pour toute fonction dérivable u.

f	F
$u'e^u$	$e^u + c$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + c$
$u' \sin u$	$-\cos u + c$
$u' \cos u$	$\sin u + c$
$u'u^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + c$

Exemple 18. *Soit* $f(x) = 2(x+1)^2 - \sin(2x-1) + 3/(5x+4)$. *Alors, une primitive de* f *est*

$$F(x) = \frac{2}{3}(x+1)^3 + \frac{1}{2}\cos(2x+1) + \frac{3}{5}\ln|5x+4|$$

5.3 Exercices

Exercice 51. 1. Préciser si les fonctions f et g données par

$$f(x) = \frac{5x^2 - 7x + 9}{3x - 1} \qquad g(x) = \frac{5x^2 - 16x + 12}{3x - 1}$$

sont des primitives d'une même fonction sur $I = [1, +\infty[$.

2. Préciser si la fonction

$$F(x) = \frac{-x^2 + x - 4}{x^2 + 3x - 1}$$

est une primitive sur $I = [1, +\infty[$ de la fonction

$$f(x) = \frac{-4x^2 + 10x + 11}{(x^2 + 3x - 1)^2}$$

Exercice 52. Donner une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants.

1. $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = 3/x^2$ sur $I =]0, +\infty[$
3. $f(x) = -4/x^3$ sur $I =]-\infty, 0[$
4. $f(x) = 1/\sqrt{x}$ sur $I =]0, +\infty[$
5. $f(x) = (2x + 1)^3$ sur $I = \mathbb{R}$
6. $f(x) = x(x^2 + 1)^2$ sur $I = \mathbb{R}$
7. $f(x) = x - \dfrac{1}{(3x + 1)^2}$ sur $I =]-1/3, +\infty[$
8. $f(x) = \dfrac{4x^2}{(x^3 + 8)^3}$ sur $I = [0, +\infty[$
9. $f(x) = 2/\sqrt{1 - x}$ sur $I =]-\infty, 1]$
10. $f(x) = 2x/\sqrt{x^2 - 1}$ sur $I =]-\infty, -1[$

Exercice 53. Donner une primitive de la fonction f sur l'intervalle I dans les cas suivants.

1. $f(x) = \sin x \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \tan x$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$
3. $f(x) = 1/\cos^2(x)$ sur $I = [0, \pi/4]$

4. $f(x) = 1/(1-x)$ sur $I =]-\infty, 1[$
5. $f(x) = (4x+2)/(x^2+x+1)$ sur $\mathbb{R}$
6. $f(x) = \ln(x)/x$ sur $]0, +\infty[$
7. $f(x) = e^{3x-5}$ sur $I = \mathbb{R}$
8. $f(x) = 3xe^{x^2-3}$ sur $I = \mathbb{R}$
9. $f(x) = e^{1/x}/x^2$ sur $I =]0, +\infty[$

Exercice 54. Donner une primitive des fonctions données par les formules suivantes sur un intervalle I aussi grand que possible, que l'on précisera.

1. $f(x) = x^4 - 5x^3 - x - 1$
2. $f(x) = 1/x^2 + 2/\sqrt{3x}$
3. $f(x) = (x+1)^3$
4. $f(x) = 4x(x^2+3)^2$
5. $f(x) = \dfrac{5x^2}{(2x^3+7)^3}$
6. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{4x-1}}$
7. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2-2}}$
8. $f(x) = (\sin^2 x - 3\sin x + 8)\cos x$
9. $f(x) = \sin x \cos^4 x$
10. $f(x) = 1/(4x-1)$
11. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$
12. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
13. $f(x) = \tan x$
14. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
15. $f(x) = 3e^{-2x+5}$
16. $f(x) = (x^3+1)e^{x^4+4x+1}$

Exercice 55. Calculer les intégrales suivantes.

$$I = \int_2^3 4t^2 dt \qquad J = \int_{-1}^3 (4t^2 - 5t - 1)dt \qquad K = \int_1^5 \frac{dt}{t^5} \qquad L = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$$

$$M = \int_0^1 te^{2t^2} dt \qquad P = \int_0^1 \frac{2}{3t+1} dt \qquad Q = \int_0^{\pi/2} 3 \sin t (\cos t)^2 dt$$

Exercice 56. 1. Soit $f(x) = x^2 + 1$. Calculer l'aire de la partie du plan définie par

$$0 \leqslant x \leqslant 3 \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

2. Soit $f(x) = 1/x^2$. Calculer l'aire de la partie du plan définie par

$$-5 \leqslant x \leqslant -1 \qquad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$

Exercice 57. (*) Calculer les intégrales suivantes en utilisant l'indication.

$$I = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-t^2} dt \quad J = \int_0^1 \frac{t}{t^2+3t+2} dt$$

$$K = \int_0^1 \frac{t^3+1}{4t^2-9} dt \quad L = \int_4^5 \frac{2t^2-t+5}{(t-2)(t+1)^2} dt$$

Indication : Pour calculer I, mettre la fraction dans l'intégrale sous la forme

$$\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1}$$

Pour calculer J, mettre la fraction dans l'intégrale sous la forme

$$\frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$$

Pour calculer K, mettre la fraction dans l'intégrale sous la forme

$$P(t) + \frac{A}{2t-3} + \frac{B}{2t+3}$$

où P est un polynôme. Enfin, pour calculer L, mettre la fraction dans l'intégrale sous la forme

$$\frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}$$