Simulation de lois discrètes

Simulation de lois classiques

Question 1.1 : Loi générale

1. Construire un algorithme qui simule une variable aléatoire X de distribution

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(X = i)$	0.1	0.2	0.05	0.05	0.05	0.15	0.35	0.05

2. Calculer le coût moyen de votre algorithme.
3. Peut-on améliorer les performances de cet algorithme ?
4. Implanter cet algorithme et son optimisation en R.
5. Écrire l'algorithme de génération par tabulation associé à cette distribution. Quel est le coût de cet algorithme ?

Question 1.2 : Loi binomiale

1. Proposer **plusieurs** algorithmes de simulation d'une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
2. Calculer le coût moyen de vos algorithmes.
3. Implanter vos algorithmes en R et comparer avec `rbinom`.

Question 1.3 : Loi géométrique

1. Proposer **plusieurs** algorithmes de simulation d'une variable aléatoire de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
2. Calculer le coût moyen de vos algorithmes.
3. Implanter vos algorithmes en R et comparer avec `rgeom`.

Question 1.4 : Escalier

On considère la variable aléatoire discrète X dont la loi est donnée par : $\forall 1 \leqslant i \leqslant n,\ \mathbb{P}(i) = c \times i$ où c est une constante multiplicative.

1. Calculer c.
2. Proposer plusieurs algorithmes de simulation de X.
3. Comparer le coût de vos algorithmes.
4. Implanter vos algorithmes en R. Jouer avec.
5. Généraliser au cas où $\mathbb{P}(i) = c \times i^\alpha$ pour $\alpha > 0$.

Question 1.5 : Loi générale

Soit X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $p_j = \mathbb{P}(X = j)$, avec $\sum_{j=1}^{\infty} p_j = 1$. Soit

$$\lambda_n = \mathbb{P}(X = n | X \geqslant n) = \frac{p_n}{1 - \sum_{j=1}^{n-1} p_j}.$$

1. Si X modélise la *durée de vie* d'un composant, comment interpréter λ_n ?
2. Montrer que
$$p_1 = \lambda_1,$$
$$p_n = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \cdots (1 - \lambda_{n-1})\lambda_n.$$
3. Soit l'algorithme suivant, on suppose donnée la fonction $\lambda(.)$:
Montrer que cet algorithme génère des valeurs distribuées selon la loi $\{p_j\}$.
4. Calculer le coût moyen associé à ce générateur.
5. Calculer la suite des λ_n pour X de loi $\mathcal{G}(p)$ et interpréter l'algorithme pour cette loi.

Algorithme 1 Générateur λ

int genere()
int x ;
x=1 ;
tant que Random() $>$ λ(x) **faire**
    x=x+1 ;
fin tant que
return x ;

Problème : Génération ... (*)

On dispose d'un générateur aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$ noté `random`. L'objectif de l'exercice est d'étudier l'algorithme de génération 2

Algorithme 2 Générateur inconnu

int genere(float alpha)
int i ;
float produit ;
float beta ;
i=-1 ;
produit=1 ;
beta = exp(-alpha) ;
répéter
    i=i+1 ;
    produit=produit*random() ;
jusqu'à (produit $<$ beta) ;
return(i) ;

Question 2.1 : Simulation

A partir de la table des "réels" pseudo-aléatoires fournie en annexe donner les résultats renvoyés par 3 appels successifs à la fonction *genere(3)*

Question 2.2 : Loi de X

En notant X la variable aléatoire modélisant le résultat d'un appel à $genere(\alpha)$, calculer

$$\mathbb{P}(X = 0), \ \ \mathbb{P}(X = 1) \ \text{ et } \ \mathbb{P}(X = 2).$$

Donner, en la justifiant la loi de X.

Question 2.3 : Analyse

Calculer le coût de cet algorithme de génération (moyenne et variance). Commenter cette méthode de génération.

Annexe :Réels (float) pseudo-aléatoires

0.327010	0.057128	0.994553	0.214157	0.825574	0.795653	0.068671	0.667426	0.755272	0.461837
0.788446	0.411315	0.905150	0.781532	0.794132	0.095405	0.647180	0.548351	0.271737	0.638842
0.723094	0.464648	0.332958	0.886690	0.764691	0.604677	0.390348	0.213932	0.135788	0.528952
0.155550	0.462798	0.586080	0.150103	0.676956	0.411654	0.945757	0.745627	0.079080	0.701028
0.207464	0.867526	0.112343	0.112614	0.649058	0.906475	0.208019	0.296238	0.454826	0.479756
0.935080	0.177919	0.944403	0.268038	0.064609	0.709094	0.872715	0.454958	0.923026	0.008503
0.983909	0.078576	0.471301	0.569990	0.228680	0.148257	0.981644	0.174436	0.893884	0.060724
0.875465	0.101348	0.928250	0.987808	0.213961	0.577309	0.894283	0.421980	0.873546	0.349109
0.901736	0.808627	0.527028	0.846139	0.076665	0.591637	0.555233	0.949380	0.046595	0.478259
0.957883	0.030504	0.556835	0.429184	0.600494	0.785515	0.577441	0.582138	0.959951	0.471325