RICM4 - Proba et Simu 2018-2019

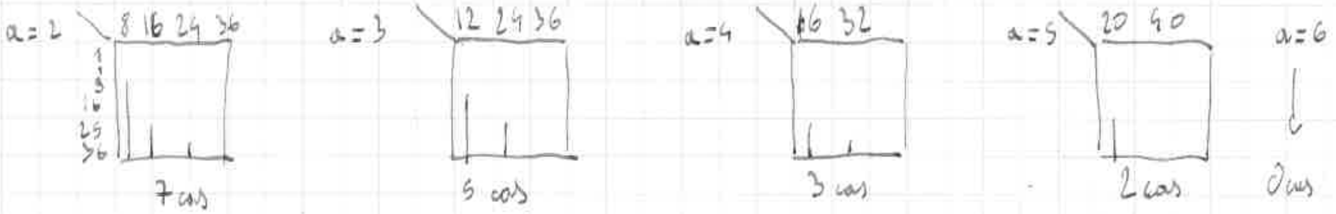
Exo 1

1.1] b et c sont tirés uniformément dans $\{1, ..., 6\}$. On cherche à calculer $\mathbb{P}(b^2 > 4c)$. Enumérons...

b^2 \ $4c$	4	8	12	16	20	24
1						
4						
9	x	x				
16	x	x	x			
25	x	x	x	x	x	x
36	x	x	x	x	x	x

$$\boxed{\mathbb{P}(b^2 > 4c) = \frac{17}{36}}$$

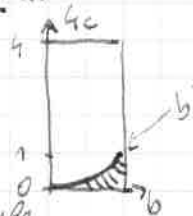
1.2] On peut procéder similairement et dénombrer pour chaque valeur de a.



$$\boxed{\mathbb{P}(b^2 > 4ac) = \frac{17+7+5+3+2}{6^3} = \frac{34}{216} = \frac{17}{108}}$$

1.3] La probabilité qu'il y ait une seule racine est nulle...

On a b et $c \sim \mathcal{U}(0,1)$ et b indépendant de c.



La zone achurée correspond aux événements tels que $b^2 > 4c$.

$$\int_0^1 b^2 \, db = \left[\frac{b^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$ l'aire du grand rectangle est 4.

$$\text{Donc } \boxed{\mathbb{P}(b^2 > 4c) = \frac{1/3}{4} = \frac{1}{12}}$$

1.4] On a $(a, c) \sim \mathcal{U}(0,1)^2$.

$$\text{Donc } \boxed{\mathbb{P}\left(a \le \frac{\alpha}{c}\right) = \alpha + \int_\alpha^1 \frac{\alpha}{c} \, dc = \alpha + \left[\alpha \ln c\right]_\alpha^1 = \alpha - \alpha \ln \alpha}$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}[b^2 > 4ac] = \mathbb{P}\left[a < \frac{b^2}{4a}\right] = \int_{b=0}^1 \mathbb{P}\left[a \le \frac{b^2}{4a}\right] db = \int_{b=0}^1 \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} \underbrace{\ln\left(\frac{b^2}{4}\right)}_{2\ln b - \ln 4} db$$

$$= \int_0^1 \frac{b^2}{4}(1 + \ln 4) - \frac{b^2}{2} \ln b \, . \, db$$

$$= \left[\frac{b^3}{3}\right]_0^1 \cdot \frac{1 + \ln 4}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 b^2 \ln b \, db = \frac{1+\ln 4}{12} \underbrace{- \frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{3} \ln b\right]_0^1}_{0} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{b^3}{3b} \, db$$

$$\boxed{= \frac{1+\ln 4}{12} + \frac{1}{6}\left[\frac{b^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1+\ln 4}{12} + \frac{1}{18}}$$

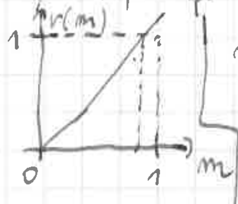
1.5]

```
N = 1000
A = runif(N)
B = runif(N)
C = runif(N)
m = mean(B*B - 4*A*C > 0)
```

```
se = sd(B*B - 4*A*C > 0)  # ou 1/2 si on est prudent
se = se / sqrt(N)
c(m - 2*se, m + 2*se)
```

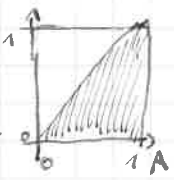
Exo 2.

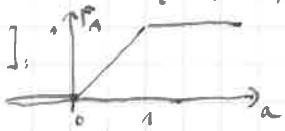
2.1] Bob se souvient certainement que $\frac{n+1}{n} M$ est un estimateur non biaisé du max (i.e. de A). C'est donc une bonne idée à ceci près qu'on perd quand on dépasse et qu'on risque de dépasser très souvent...

En particulier : 

Dès qu'on reçoit $m \geq \frac{10}{11} \simeq 0{,}909$, on va renvoyer un nombre supérieur à 1 et on va donc perdre systématiquement...

```
N = 10000
n = 10
A = runif(N)
M = runif(N, max = A)
for (i in 2:n) { M = pmax(M, runif(N, max = A)) }
R = 1.1*M
mean((R-M)*(R<A))
```

2.2] ▶ On a $M \leq A$ donc le support de (A,M) est $\{(a,m) \mid a \in [0,1] \text{ et } m \in [0,a]\}$ = 

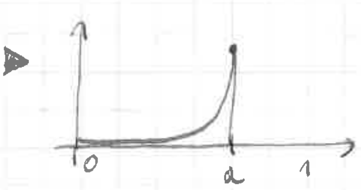
▶ $F_A(a) = \mathbb{P}[A \leq a] = a$ si $a \in [0,1]$. 

$f_A(a) = 1$

▶ Pour a fixé $F_{M|A=a}(m) = \mathbb{P}[M \leq m \mid A = a] = \mathbb{P}[\forall i\ X_i \leq m \mid A = a] = \prod_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}[X_i \leq m \mid A = a]}_{\frac{m}{a}}$

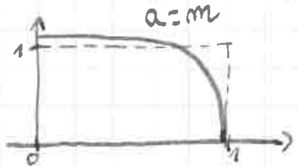
$= \left(\frac{m}{a}\right)^n$ pour $m \in [0,a]$

Donc en dérivant par rapport à m : $f_{M|A=a}(m) = \frac{n\, m^{n-1}}{a^n}$

▶ 

2.3] ▶ Pour avoir la densité de M il faut intégrer sur toutes les valeurs possibles de A. Pour m donné on a $a \geq m$.

$$f_M(m) = \int_{a=m}^{1} \frac{n\, m^{n-1}}{a^n}\, da = n\, m^{n-1} \left[\frac{-1}{(n-1)a^{n-1}}\right]_m^1 = \frac{n\, m^{n-1}}{n-1}\left(\frac{1}{m^{n-1}} - 1\right) = \frac{n}{n-1}\left(1 - m^{n-1}\right)$$

▶ 

On est proche de l'uniforme de A mais les petites valeurs sont plus fréquentes. Les plus grandes valeurs sont d'autant plus rares...

▸ . $F_M(m) = \int_0^m \frac{n}{n-1}\left(1 - m^{n-1}\right) dm = \frac{n}{n-1}\left[m - \frac{m^n}{n}\right]_0^1 = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

▸ On pourrait diviser l'intervalle $[0,1]$ en k segments $[0,\frac{1}{k}], [\frac{1}{k},\frac{2}{k}], \dots, [\frac{k-1}{k}, 1]$. Grâce à F_M on peut calculer la probabilité que M soit dans chaque intervalle. On pourrait alors faire un test d'adéquation du χ^2.

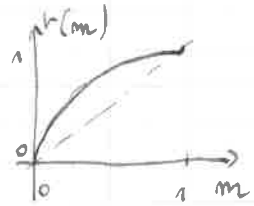
2.4] ▸ m et r sont donnés. Il faut intégrer sur les valeurs de a possible : $m \leq r \leq a \leq 1$ conduit à un gain de $r-m$

▸ Donc $\mathbb{E}(G_{m,r}) = \int_{a=r}^{1} (r-m) \cdot \frac{n m^{n-1}}{a^n} da = (r-m) n m^{n-1} \left[\frac{-1}{(n-1)a^{n-1}}\right]_r^1 = \boxed{\frac{n}{n-1} m^{n-1} (r-m)\left(\frac{1}{r^{n-1}} - 1\right)}$

2.5] ▸ Pour m fixé, on cherche r qui maximise le gain $\mathbb{E}(G_{m,r})$. Si on dérive par rapport à r et qu'on cherche le zéro, on aura l'optimal.

$$\mathbb{E}(G_{m,r}) = \underbrace{\frac{n}{n-1} m^{n-1}}_{\alpha} (r-m)\Big(\underbrace{\frac{1}{r^{n-1}}}_{=\frac{1}{r} \text{ pour } n=2} - 1\Big) = \alpha\left(1 + m - \frac{m}{r} - r\right)$$

En dérivant on obtient $\frac{m}{r^2} - 1$ qui vaut 0 ssi $\boxed{r = \sqrt{m}}$

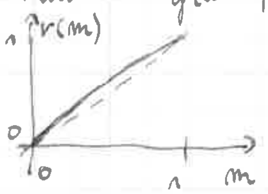
▸ 

Pour m près de 1, a est entre m et 1 et on a peu de marge de manœuvre, il faut jouer très proche de m.

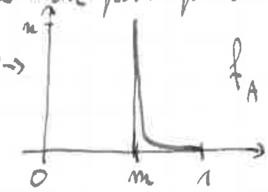
Pour m près de 0, le a ne peut être très loin.

Pour m proche de $\frac{1}{2}$, soit a est proche de $\frac{1}{2}$, soit on a tiré des X_i assez petits. On a donc plus de liberté.

▸ Plus n est grand, plus M va être proche de A et il ne faudra donc pas trop s'en éloigner...



Si on regarde $f_{A|M=m}$, elle a cette allure →



$f_{A|M=m}(a) = \frac{n m^{n-1}}{a^n}$