RICM4 Probabilités et Simulation – Examen

Arnaud Legrand, Florence Perronnin

8 janvier 2018

Conseils et consignes importantes

- Il y a beaucoup de sous-questions, n'en oubliez pas !
- La plupart des questions sont largement indépendantes les unes des autres et ne sont pas de difficulté croissante. Si vous n'arrivez pas à faire une question, n'hésitez pas à passer à la suivante. Néanmoins, merci de rédiger la réponse aux différentes questions dans l'ordre.
- Il arrive que les réponses à certaines questions soient données à titre indicatif afin que vous puissiez vérifier vos résultats ou alors que vous puissiez plus facilement passer à la question suivante.
- Le barème est donné à titre purement indicatif afin de vous aider à répartir votre temps ainsi que d'avoir une idée de la difficulté de la question ou du niveau de détail attendu.
- Lors de la notation, une attention toute particulière sera apportée à la qualité de la rédaction. Lorsque du code est demandé, vous vous attacherez à proposer un code le plus concis et le plus élégant possible.
- Un bon dessin vaut mieux qu'un long discours. N'hésitez pas à faire des dessins pour illustrer vos recherches et vos intuitions.
- À part les livres, tout type de document (manuscrit, imprimé) est autorisé.

Exercice 1 : Racines d'un polynome du second degré (12 pts)

On rappelle que le nombre de racines réelles d'un polynome $a.X^2 + b.X + c$ est indiqué par son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$: deux racines distinctes si $\Delta > 0$, une seule racine si $\Delta = 0$ et pas de racine si $\Delta < 0$.

1.1 Un polynôme tiré au dé

► **Q1.1. (1 pt)** On s'intéresse au polynome $X^2 + b.X + c$ où b et c sont tirés indépendemment à l'aide un dé à 6 faces non biaisé. Quelle est la probabilité que ce polynome ait deux racines distinctes ?

► **Q1.2. (2 pts)** On s'intéresse au polynome $a.X^2 + b.X + c$ où a, b et c sont tirés indépendemment à l'aide d'un dé à 6 faces non biaisé. Quelle est la probabilité que ce polynome ait deux racines distinctes ?

1.2 Un polynôme moins discret

▶ **Q1.3. (2 pts)** On s'intéresse maintenant au polynome $X^2 + b.X + c$ où b et c sont tirés indépendemment et uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$.

1. Quelle est la probabilité que ce polynome ait une seule racine ?
2. Quelle est la probabilité que ce polynome ait deux racines distinctes ? (*Réponse :* $\frac{1}{12}$).

▶ **Q1.4. (4 pts)** On s'intéresse enfin au polynome $a.X^2 + b.X + c$ où a, b et c sont tirés indépendemment et uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$. Quelle est la probabilité que ce polynome ait deux racines distinctes ?

(*Réponse :* $\frac{1+\ln(4)}{12} + \frac{1}{18}$).

Indication : (1) On pourra commencer par calculer $\mathbb{P}[a \leqslant \alpha/c]$ *pour* $\alpha \leqslant 1$ *fixe.*
(2) Une intégration par partie permet d'obtenir $\int x^2 \ln(x).dx = [\frac{x^3}{3} \ln(x)] - \int \frac{x^3}{3}.\frac{1}{x}.dx$

▶ **Q1.5. (3 pts)**

1. Écrire un code R simulant la situation de la question précédente et permettant d'estimer cette probabilité.
2. Rajouter à votre code R l'estimation de la précision associée (l'intervalle de confiance à 95%).

Exercice 2 : Un jeu à base de max (14 pts)

On s'intéresse au jeu suivant entre Alice et Bob :
- Alice tire (secrètement) un nombre A uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$.
- Elle tire ensuite (toujours secrètement) $n \geqslant 2$ nombres $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendemment et uniformément dans l'intervalle $[0, A]$. n est un nombre fixe et décidé par Alice et Bob avant de jouer (par exemple $n = 10 \ldots$).
- Elle annonce à Bob la plus grande valeur obtenue $M = \max_i X_i$. Cette valeur M est donc toujours inférieure à A.
- Bob doit alors deviner la valeur de A à partir de la valeur M révélée par Alice. Pour cela, il propose une réponse $r(M)$ aussi proche que possible de A.
  - Si $r(M)$ est strictement supérieur à A, Bob a perdu et Alice le lui prouve en révélant A.
  - Si $r(M)$ est plus petit que A, Bob gagne la différence entre M et $r(M)$ (i.e., Alice doit donner $G = r(M) - M$ euros à Bob).

L'objectif de cet exercice est d'étudier ce jeu (stratégie gagnante, espérance de gain, etc.).

▶ **Q2.1. Simulation (2 pts)** Bob n'a pas encore trop pu réfléchir à la bonne stratégie et il se propose donc d'essayer la stratégie $r(M) = 1.1M$ lorsque $n = 10$.

1. Quelle est l'intuition de Bob (qui a suivi le cours de probabilité en RICM) ? Est-ce une bonne stratégie selon vous (si oui pourquoi ? si non pourquoi ?).
2. Écrire un code R simulant cette situation et permettant d'estimer l'espérance du gain G de Bob.

▶ Q2.2. Densité de la loi jointe de A et de M : (3 pts)

1. Décrire l'ensemble des valeurs pouvant être prises par le couple (A, M).
2. Donner la fonction de répartition et la densité de A.
3. Comme vu en cours, pour une valeur a de A donnée, calculer la fonction de répartition de «M sachant que $A = a$» (i.e., «$M|A = a$») puis en déduire la densité. (*Réponse :* $f_{M|A=a}(m) = \frac{n.m^{n-1}}{a^n}$).
4. Quelle est l'allure de cette fonction pour un n (et un a) fixé ?

On déduit donc des questions précédentes que :

$$f_{M,A}(m, a) = \mathbb{P}\left[M \in [m, m + dm] \text{ et } A \in [a, a + da]\right] = \frac{n.m^{n-1}}{a^n}.dm.da$$

▶ Q2.3. Loi de M (4 pts)

1. En déduire la densité de M (*Réponse :* $f_M(m) = \frac{n}{n-1}(1 - m^{n-1})$).
2. Quelle est l'allure de cette fonction ? Est-ce surprenant ?
3. Vérifier que l'intégrale de cette densité vaut bien 1.
4. Comment Bob peut-il vérifier (sur un grand nombre de parties) qu'Alice ne triche pas et lui propose bien des réalisations de M conformes à la règle du jeu ?

▶ Q2.4. Espérance du gain : (2 pts) Alice a annoncé une valeur m et Bob décide de répondre une valeur r.

1. Pour un m et un r donné quelles sont les valeurs de a qui induisent un gain pour Bob ?
2. En déduire l'espérance du gain G de Bob (*Réponse :* $\mathbb{E}[G|M = m \text{ et } r(m) = r] = \frac{n}{n-1}m^{n-1}(r - m)(\frac{1}{r^{n-1}} - 1)$).

▶ Q2.5. Stratégie optimale : (2 pts)

1. Déduire de la question précédente que, pour le cas particulier $n = 2$, la stratégie optimale de Bob est de jouer $r(m) = \sqrt{m}$.
2. Quelle est l'allure de cette stratégie optimale ? Est-ce surprenant ?
3. Selon vous, comment cette allure évolue-t-elle quand n devient grand ?

Rappels mathématiques divers

À toute fin utile :

— Une primitive de $(x \to x^\alpha)$ est $(x \to \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1})$ si $\alpha \neq 1$ et $(x \to \ln(x))$ si $\alpha = 1$.
— Pour une variable aléatoire X, on note :
  — F_X la loi de répartition de X défine par $F_X(x) = \mathbb{P}[X \leqslant x]$
  — f_X la densité de X définie par $f_X = F'_X$
— Pour A et B deux évènements, on définit $\mathbb{P}[A|B] = \frac{P[A \text{ et } B]}{\mathbb{P}[B]}$.
— Si A et B sont deux variables aléatoires, pour une valeur b de B fixe on a donc :
  — $F_{A|B\leqslant b}(a) = \frac{F_{A,B}(a,b)}{F_B(b)}$
  — $f_{A|B=b}(a) = \frac{f_{A,B}(a,b)}{f_B(b)}$