# Quick du 23 octobre 2018 - durée 45mn

- Documents autorisés.
- Calculatrice interdite.
- Le barème est purement indicatif.
- Réponse non justifiée : 0.
- Réponse pipeau : -1.

## 1 Échauffement (5mn, 2pts)

**Question 1.1 :** (2 pts). On considère une population dans laquelle en moyenne, on trouve un centenaire pour 1000 personnes. On réunit 1000 personnes choisies au hasard dans cette population. Quelle est la probabilité de trouver *au moins* un centenaire dans le groupe ? Et dans un groupe de 2000 personnes ?

## 2 Loi discrète inconnue (25mn, 11 pts)

### Première approche (15mn)

Soit $X_1$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de loi : $\mathbb{P}[X_1 = i] = \frac{c_1}{i\,!} \qquad \forall i \geq 0$

**Question 2.1 :** Paramètres de la loi (3pts). Calculer $c_1$. Calculer la valeur la plus probable (mode) de cette loi, ainsi que la médiane. Calculer l'espérance de $X$.
**Question 2.2 :** Simulation (4 pts). Écrire un algorithme de simulation de $X_1$ et faire l'analyse de son coût.

### Exploitation (10mn)

On considère maintenant une autre variable aléatoire, $X_2 \in \mathbb{N}$ et de loi : $\mathbb{P}[X_2 = i] = c_2 \frac{2^i}{i\,!} \qquad \forall i \geq 0$

**Question 2.3 :** Paramètres (1pt). Calculer $c_2$.
**Question 2.4 :** Relation avec $X_1$ (2 pts). Montrer que $X_2$ a la loi de la somme de 2 variables aléatoires indépendantes de même loi que $X_1$.
**Question 2.5 :** Simulation (1pt). En déduire un algorithme de génération pour $X_2$.

### Généralisation (bonus)

Une variable aléatoire discrète $Y \in \mathbb{N}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ si et seulement si : $\mathbb{P}[Y = i] = \frac{\lambda^i}{i\,!} e^{-\lambda}$

**Question 2.6 :** (facultative, 2pts bonus). En déduire un algorithme de génération d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $n \in \mathbb{N}$.

## 3 Générateur mystère (15mn, 7pts)

En pseudo-code :

```
Generateur1():
  U=random()
  X=1/(1+U)
  return X
```

**Question 3.1 :** Loi mystère (5pts) . Donner la loi de la variable aléatoire simulée par l'algorithme Générateur1 (support, fonction de répartition et densité).
**Question 3.2 :** Moyenne (2pts). En déduire son espérance.

## Annexe : Réels (float) pseudo-aléatoires

Des appels successifs à un générateur pseudo-aléatoire donnent les nombres suivants (lecture en *ligne*, de gauche à droite).

```
0.327010 0.057128 0.994553 0.214157 0.825574 0.795653 0.068671 0.667426 0.755272 0.461837
0.788446 0.411315 0.905150 0.781532 0.794132 0.095405 0.647180 0.548351 0.271737 0.638842
0.723094 0.464648 0.332958 0.886690 0.764691 0.604677 0.390348 0.213932 0.135788 0.528952
0.155550 0.462798 0.586080 0.150103 0.676956 0.411654 0.945757 0.745627 0.079080 0.701028
0.207464 0.867526 0.112343 0.112614 0.649058 0.906475 0.208019 0.296238 0.454826 0.479756
0.935080 0.177919 0.944403 0.268038 0.064609 0.709094 0.872715 0.454958 0.923026 0.008503
0.983909 0.078576 0.471301 0.569990 0.228680 0.148257 0.981644 0.174436 0.893884 0.060724
0.875465 0.101348 0.928250 0.987808 0.213961 0.577309 0.894283 0.421980 0.873546 0.349109
0.901736 0.808627 0.527028 0.846139 0.076665 0.591637 0.555233 0.949380 0.046595 0.478259
0.957883 0.030504 0.556835 0.429184 0.600494 0.785515 0.577441 0.582138 0.959951 0.471325
```

## Annexe : Rappels de Formules (pseudo-aléatoires)

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1}$$

$$\binom{N}{k} = C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!} \tag{2}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \tag{4}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \quad \text{if } \ 0 < x < 1 \tag{6}$$

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\ln(x)$ | 0 | 0.693 | 1.098 | 1.386 | 1.609 |
| $e^x$ | 2.718 | 7.389 | 20.085 | 54.598 | 148.413 |
| $e^{-x}$ | 0.368 | 0.135 | 0.049 | 0.018 | 0.006 |

(7)