Continuous-time Markov chains

Florence Perronnin

Performance evaluation

April 13, 2018

Outline

1 Processus de Poisson

2 Chaînes de Markov à temps continu

3 Reversibility

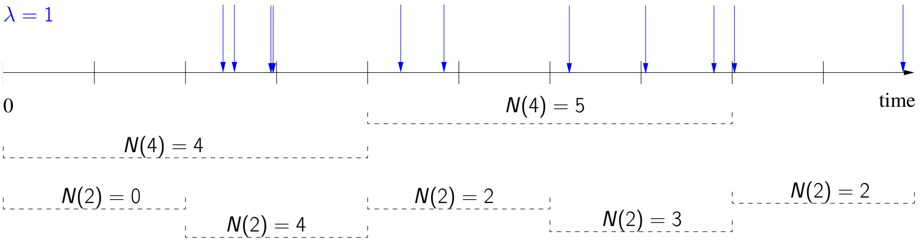
4 Processus de Naissance et de Mort

5 Conclusion

6 Files d'attente classiques

Processus de Poisson

définition 1



Processus de comptage

Soit $N(t)$ le nombre d'événements dans l'intervalle $[0, t)$. $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[N(T) = k] = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} \qquad \text{Loi de Poisson} \tag{1}$$

Processus de Poisson

définition 2

Définition infinitésimale

On considère un processus stochastique à temps discret et à espace d'états continus $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < \ldots$ dénotant les instants d'occurrence d'événements. Les 4 conditions suivantes doivent être remplies simultanément :

1. $\mathbb{P}[$1 seul év. dans intervalle de durée h$] = \lambda h + o(h)$
2. $\mathbb{P}[$plusieurs év. dans intervalle de durée h$] = +o(h)$
3. Le nombre d'événements dans des intervalles disjoints sont des variables aléatoires indépendantes.

Processus de Poisson

définition équivalente

Interarrivées

L'intervalle de temps $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ entre 2 événements consécutifs est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λ. De plus $\forall n, m / n \neq m$, les variables τ_n et τ_m sont indépendantes.

Preuve:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\tau_n \leq \tau] &= 1 - \mathbb{P}[\tau_n \geq \tau] \\
&= 1 - \mathbb{P}[\text{aucune arrivée entre } t_n \text{ et } t_n + \tau] \\
&= 1 - \mathbb{P}[N(\tau) = 0] \\
&= 1 - \frac{(\lambda\tau)^0}{0!} e^{-\lambda\tau} \\
&= 1 - e^{-\lambda\tau} \qquad \text{loi exponentielle}
\end{aligned}$$

Origine des Processus de Poisson

Origine des Processus de Poisson

Problème de Siméon Denis Poisson

Trouver la loi du nombre de criminels par région.

Modèle: chaque individu est un criminel potentiel avec proba p. Donc sur une population de n individus,

$$P(k \text{ criminels}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{2}$$

En supposant constante la criminalité moyenne $\mathbb{E}[N] = np = \lambda$ on obtient $p = \lambda/n$ ce qui permet de faire le calcul asymptotique suivant pour $n \to \infty$

$$\begin{aligned} P(k \text{ criminels}) &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{n}}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n && (3) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!(n-\lambda!)^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n && (4) \\ &\sim 1 \times \frac{\lambda^k}{k!} \times e^{-\lambda} && (5) \end{aligned}$$

Modélisation par des processus de Poisson

Limite asymptotique de la loi binomiale : **superposition d'un grand nombre (idéalement illimité) de comportement indépendants.** L'idée principale est que chaque événement est indépendant de tous les autres.

- morts par coups de sabot de cheval dans l'armée prussienne [Ladislaus Bortkiewicz, 1898]
- appels arrivant à un central téléphonique [Erlang, 1909]
- défauts de crédit
- arrivées de particules radioactives sur un compteur Geiger
- arrivées de connexions TCP [Paxon & Floyd 1994]

En revanche, les arrivées de *paquets* TCP ne suivent pas un processus de Poisson, car ces arrivées sont corrélées.

Nombre moyen d'événements

On considère un processus de Poisson de paramètre λ. Le nombre moyen d'événements dans un intervalle de durée t est :

$$\mathbb{E}\left[N(t)\right] = \lambda t.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[N(t)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} &\quad (7)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} e^{-\lambda t} &\quad (8)\\
&= \lambda t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} &\quad (9)\\
&= \lambda t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} &\quad (10)\\
&= \lambda t e^{\lambda t} e^{-\lambda t} &\quad (11)\\
&= \lambda t. &\quad (12)
\end{aligned}$$

Uniformité

Soit un processus de Poisson de paramètre λ et un intervalle de temps $I = [t, t+s]$.
Si l'on connaît le nombre d'événements qui se sont produits dans l'intervalle I, alors les instants d'occurrence de ces événements dans l'intervalle I sont distribués uniformément sur I.
Par exemple, pour 1 seul événement : on note t_1 l'instant d'arrivée de cet événement unique dans I.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[t_1 \leq x | N(I) = 1] &= \frac{\mathbb{P}[t_1 \leq x \text{ et } N(I) = 1]}{\mathbb{P}[N(I) = 1]} && (13)\\
&= \frac{\mathbb{P}[1 \text{ ev. dans } [t, t+x] \text{ et aucun dans } [t+x, t+s]]}{\lambda s\, e^{-\lambda s}} && (14)\\
&= \frac{\lambda x\, e^{-\lambda x} e^{-\lambda(s-x)}}{\lambda s\, e^{-\lambda s}} && (15)\\
&= \frac{x}{s} \qquad \text{c.d.f de la loi uniforme sur} [t, t+s] && (16)
\end{aligned}$$

Superposition de processus de Poisson

On considère 2 processus de Poisson indépendants, de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Par exemple, l'arrivée de requêtes sur un serveur A, et l'arrivée de requêtes sur un serveur B. On s'intéresse au processus total, i.e. l'ensemble des requêtes arrivant dans le système composé des serveurs A et B.

Théorème

La superposition de ces deux processus est un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Preuve: Soit τ_n l'intervalle de temps entre le $n$ième et le $n+1$ème événements du processus superposé (total).

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\tau_n \leq x] &= 1 - \mathbb{P}[\tau_n \geq x] && (17)\\
&= 1 - \mathbb{P}[N_1(x) = 0]\,\mathbb{P}[N_2(x) = 0] && (18)\\
&= 1 - e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} && (19)\\
&= 1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) x} && (20)
\end{aligned}$$

Décomposition d'un processus de Poisson

Soit $\{N(t)\}$ un processus de Poisson de paramètre λ. On construit un second processus $\{N'(t)\}$ de la façon suivante : Pour chaque événement du processus d'origine, on garde l'événement dans $\{N'(t)\}$ avec une probabilité p, et on ignore cet événement avec probabilité $1 - p$. Les tirages pour chaque événements sont indépendants.

théorème

Le processus résultat $\{N'(t)\}$ est un processus de Poisson de paramètre $\lambda\, p$.

Exemple

On considère les arrivées de jobs à un serveur. Elles suivent un processus de Poisson de paramètre λ. Chaque client, avec une probabilité p, décide d'abandonner sa requête. Le processus d'arrivée réel est un processus de Poisson de paramètre $\lambda\, p$.

Outline

1 Processus de Poisson

2 Chaînes de Markov à temps continu
- Continuous-time modeling

3 Reversibility

4 Processus de Naissance et de Mort

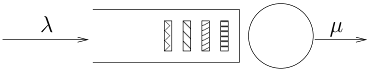
5 Conclusion

6 Files d'attente classiques

Limitations of discrete-time

Consider a single FIFO server M/M/1/2

- arrivals: Poisson(0.5)
- variable service-time: $\mathcal{E}(1)$

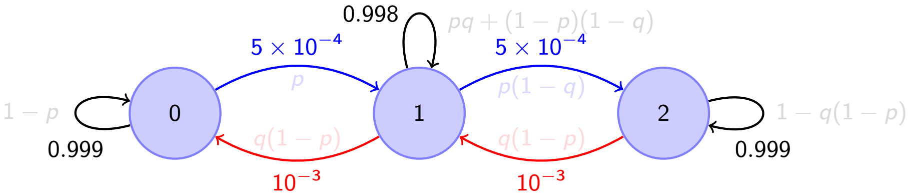


discrete-time model

$\{X_n\}$ = number of jobs at **time slot** n of duration $t = 10^{-3}$ s.
We can simplify the model by neglecting multiple arrivals / multiple departures in a single time slot:

Event probabilities:

1 arrival	$p = (0.5t)e^{-0.5t} = 4.99 \times 10^{-4}$
no arrival	0.9995001
$\geq$ 1 arrival	$\approx 10^{-7}$
1 departure	$q = 9.99 \times 10^{-4}$

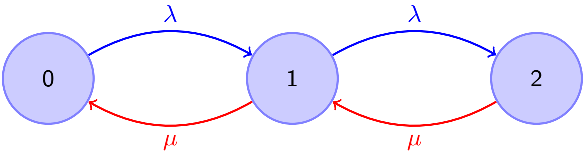


Continuous-time modeling

Discrete-time limitations

- time-slot granularity
- approximations (neglect some unlikely transitions)

Continuous-time model



Définition des Chaînes de Markov à temps continu (CMTC)

$\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ processus stochastique à temps continu : transitions à instants t quelconques (non dénombrables).
L'espace d'états $\mathcal{S}$, lui, reste discret.

Propriété de Markov

Pour tout n (taille d'observation) et pour tout $n+2$-uplet $(t_0, \ldots, t_n + 1)$ tel que $t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1}$, on a :

$$\mathbb{P}[X_{t_{n+\mathbf{1}}} = j_{n+1} | X_{t_n} = j_n, \ldots, X_{t_\mathbf{0}} = j_0] = \mathbb{P}[X_{t_{n+\mathbf{1}}} = j_{n+1} | X_{t_n} = j_n]$$

En bref, la connaissance de fragments anciens de trajectoire n'apporte pas d'information sur la suite de la trajectoire si l'on connaît un état plus récent.

Probabilités de transition

Les probabilités de transition sont définies par :

$$\mathbb{P}[X_t = j | X_s = i] = P_{t-s}(i,j)$$

(si la CMTC est **homogène**).
La matrice de transition P_t dépend donc du temps t, comme à temps discret elle dépendait du nombre de “slots” : $P^{(n)} = P^n$.

Question

Pour $t = 0$, que devient la matrice de transition P_t?
C’est l’identité (le processus ne peut pas changer d’état en un temps nul)

$$lim_{t \to 0} P_t = I$$

Chapman-Kolmogorov à temps continu

Pour tout couple d’états (i,j) et pour tous instants t et s :

$$P_{t+s}(i,j) = \sum_{k \in \mathcal{S}} P_t(i,k) P_s(k,j)$$

soit sous forme matricielle :

$$P_{t+s} = P_t P_s$$

Générateur infinitésimal

Puisque la matrice de transition P_t est une fonction du temps, il est plus simple de travailler avec une autre matrice, constante, représentant la dynamique du système. C'est le rôle du générateur infinitésimal, défini (pour l'instant) comme la dérivée de la matrice de transition en 0 (rappel: $lim_{t \to 0} P_t = I$)

Définition

$$Q = \lim_{t \to 0} \frac{P_t - I}{t}$$

propriétés du générateur infinitésimal

- Ce générateur $Q = q_{ij}$ vérifie également :

$$\mathbb{P}[X_{t+dt} = j | X_t = i] = q_{ij} dt + o(dt)$$

- toutes ses lignes sont à somme nulle:

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} q_{ij} = 0$$

- tous ses coefficients sont positifs (ou nuls) sauf les coefficients diagonaux, qui du coup sont forcément négatifs.

$$q_{ii} \leq 0, \;\; q_{ij} \geq 0 \text{ si } i \neq j$$

On a donc

$$q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$$

Interprétation du générateur infinitésimal

Taux de transition

Les coefficients q_{ij} du générateur $Q = (q_{ij})$ représentent le taux de transition de i vers j lorsque $j \neq i$. On peut les voir comme la “vitesse” de l'événement qui fait passer le système de l'état i vers l'état j.

Interprétation de q_{ij}

- temps de séjour en i: variable aléatoire de loi $Exp(-q_{ii})$
- puis saut instantané vers j avec probabilité $\frac{-q_{ij}}{q_{ii}}$

Il n'y a donc jamais de “taux de transition d'un état i vers lui-même” : la CMTC reste sur place un temps exponentiellement distribué de paramètre $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$

Construction équivalente de la CMTC

à l'instant t où le processus X_t entre dans l'état i:

- on tire pour chaque état $j \neq i$ une durée aléatoire T_{ij} de loi $Exp(q_{ij})$
- Si le minimum des T_{ij} est réalisé pour un état donné k, le processus restera en i un temps T_{ik} puis sautera directement dans l'état k.

Cela peut être vu comme une compétition entre les différents événements pouvant se produire à partir d'un état.

temps de séjour

Le temps de séjour est le minimum des T_{ij} : c'est donc une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\sum_{j \neq i} q_{ij} = -q_{ii}$

Exercice

Modéliser la M/M/1 avec une CMTC (i.e., définir $\{X_t\}$ ainsi que son espace d'états) et calculer son générateur infinitésimal ainsi que son graphe de transition.

Faulty machines model

- 1 main server M, high quality
  - Up time: $\sim \mathcal{E}(\beta)$
  - Repair time: $\sim \mathcal{E}(\alpha)$
- 1 secondary server S for backup (and, why not, increased service rate)
  - Up time: $\sim \mathcal{E}(\mu)$
  - Repair time: $\sim \mathcal{E}(\lambda)$

Exercise

The goal is to estimate the **availability** of the system, *i.e.* the probability that at least one server is up and running.

1. Define a CTMC model
2. What is the state space?
3. Determine the transition diagram
4. Compute the infinitesimal generator

How can the model be simplified when $\alpha = \lambda$ and $\beta = \mu$?

Comportement asymptotique

La distribution transitoire est difficile à calculer et peu maniable (change à chaque instant). On s'intéresse à la probabilité que le système soit dans un état donné en régime stationnaire : c'est la **distribution limite.**

Théorème

- Si $\{X_t\}$ est irréductible (tous les états communiquent)
- et si le système

$$\pi Q = 0 \qquad \text{(Balance equations)}$$

  admet une unique solution strictement positive π^* telle que $\sum_i \pi^*(i) = 1$ (vecteur de probabilités)

Alors la distribution π^* est la distribution limite

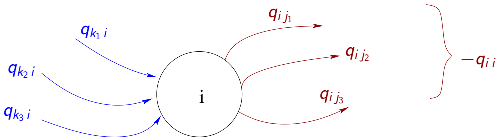
$$\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}[X_t = i] = \pi^*(i)$$

Équations d'équilibre

On peut voir l'équation $\pi Q = 0$ comme une conservation des flux:
On cherche $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_i, \ldots)$ un vecteur de probabilités tel que:

$$\forall i,\ \sum_{j \neq i} q_{ij}\pi_i = \sum_{k \neq i} \pi_k q_{ki}$$

- $\sum_{j \neq i} q_{ij}\pi_i$: flux sortant de l'état i
- $\sum_{k \neq i} \pi_k q_{ki}$: flux entrant dans l'état i



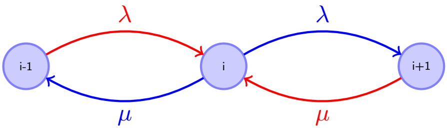
Comme dans le cas du temps discret, on a besoin d'une équation supplémentaire: l'équation de normalisation:

$$\sum_i \pi_i^* = 1$$

Example : Balance equations for the M/M/1 model

1. Define a CTMC : $X(t)$ = number of clients in the system
2. Determine transition rates:
   - birth rate: $q_{i,i+1} = \lambda$
   - death rate: $q_{i,i-1} = \mu$ if $X(t) \geq 1$ (the server only works if there is at least 1 client)
3. Write balance equations (to find stationary distribution π)

outgoing rate... $(\lambda + \mu)\pi_i = \lambda\pi_{i-1} + \mu\pi_{i+1}$ ...incoming rate



Example : Balance equations for the M/M/1 model (cont'd)

4. Solve balance equations (up to a factor, namely π_0):

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0$$

Define $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (system load). Then

$$\pi_i = \rho^i \pi_0$$

5. Determine π_0 (and its existence condition) using the **normalization** equation

$$\sum_i \pi_i = 1 \Rightarrow \rho < 1 \text{ or equivalently } \lambda < \mu$$

If this stability condition is verified then

$$1 = \sum_i \pi_i = \sum \rho^i \pi_0 = \pi_0 \frac{1}{1-\rho} \Leftrightarrow \pi_0 = 1 - \rho$$

Finally we get :

$$\pi_i = \rho^i (1-\rho) \qquad \forall i \geq 0 \tag{21}$$

Exercise : Balance equations for the faulty machines model

Outline

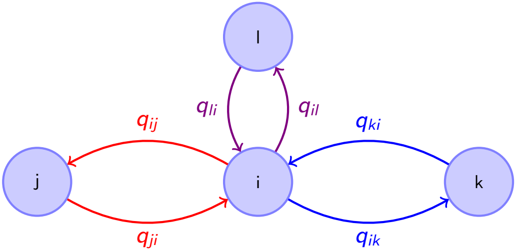
1. Processus de Poisson
2. Chaînes de Markov à temps continu
3. Reversibility
4. Processus de Naissance et de Mort
5. Conclusion
6. Files d'attente classiques

Reversibility

Definition

A continuous-time Markov chain $X(t)$ is time-reversible if and only if there exist a probability distribution π such that $\forall (i,j) \in \mathcal{S}^2$,

$$\pi_i \, q_{ij} = \pi_j \, q_{ji} \qquad \text{(Detailed balance)}$$



Reversibility

Theorem

If a Markov chain is time-reversible then the π distribution is also the stationary distribution.

Proof

Detailed balance $\Rightarrow$ global balance:

$$\begin{aligned} \forall i, j, \quad \pi_i\, q_{ij} &= \pi_j\, q_{ji} \\ \Rightarrow \forall i, \quad \sum_{j \neq i} \pi_i\, q_{ij} &= \sum_{j \neq i} \pi_j\, q_{ji} \end{aligned}$$

Outline

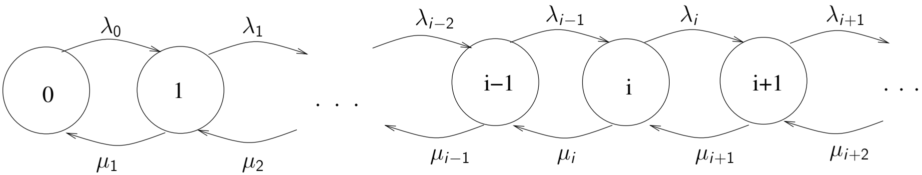
1. Processus de Poisson
2. Chaînes de Markov à temps continu
3. Reversibility
4. Processus de Naissance et de Mort
5. Conclusion
6. Files d'attente classiques

Processus de Naissance et de Mort

Definition

Un processus de naissance et de mort est une CMTC dont le générateur infinitésimal $\mathrm{Q} = (q_{ij})$ est une matrice tridiagonale: $\forall i \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned} q_{i,i+1} &= \lambda_i \\ q_{i,i-1} &= \mu_i \\ q_{i,j} &= 0 \qquad \text{if } j \notin \{i-1, i, i+1\} \end{aligned} \tag{22}$$



Lorsque le processus $X(t)$ est dans un état i, il ne peut aller que vers ses voisins immédiats $i+1$ et $i-1$

Générateur

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & 0 & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Balance equations

Global balance

$$
\begin{aligned}
\lambda_0 \pi_0 &= \mu_1 \pi_1 && (23)\\
(\lambda_i + \mu_i)\pi_i &= \lambda_{i-1}\pi_{i-1} + \mu_{i+1}\pi_{i+1} && (24)
\end{aligned}
$$

$$\text{eq.}(23) \Rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0$$

and

$$
\begin{aligned}
\text{eq.}(24) \text{ for } i = 1 \quad &\Rightarrow \quad (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 = \lambda_0\pi_0 + \mu_2\pi_2\\
&\Rightarrow \quad \mu_2\pi_2 = (\lambda_1 + \mu_1)\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 - \lambda_0\pi_0\\
&\Rightarrow \quad \mu_2\pi_2 = \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_1}\pi_0\\
&\Rightarrow \quad \pi_2 = \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}\pi_0 && (25)
\end{aligned}
$$

Solving balance equations

The above equations suggest a solution of the form:

$$\pi(n) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \pi(0)$$

Exercice

Prove by induction that the above expression satisfies the balance equations.

Then π_0 can be computed using the normalization equation $\sum_i \pi_i = 1$ if the system is stable (finite sum):

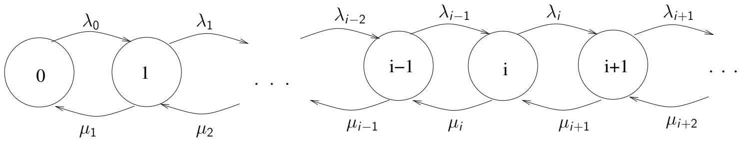
$$\pi(0) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \ldots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}}$$

Reversibility for BDP

Proposition

An ergodic birth and death process is time-reversible.

Proof



By induction:

1. $\pi_0\lambda_0 = \pi_1\mu_1$
2. Suppose $\pi_{i-1}\lambda_{i-1} = \pi_i\mu_i$. Then
   $\pi_i(\lambda_i + \mu_i) = \pi_{i+1}\mu_{i+1} + \pi_{i-1}\lambda_{i-1}$
   Which gives $\pi_i\lambda_i = \pi_{i+1}\mu_{i+1}$.

□

We get $\pi_{i+1} = \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\pi_i$, which directly gives the previous result !

Théorème pour les processus de naissance et de mort

(Condition de stabilité) Si la série $C_n = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \ldots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} + \ldots$ converge vers une limite $C < \infty$:
Alors le processus de naissance et de mort admet pour distribution limite :

$$\pi(n) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \pi(0)$$

où $\pi(0) = \frac{1}{C}$.

Outline

1 Processus de Poisson

2 Chaînes de Markov à temps continu

3 Reversibility

4 Processus de Naissance et de Mort

5 Conclusion
- Examples

6 Files d'attente classiques

CTMC recipe (1)

1. define a Markov chain X_t. *(For example X_t can be the number of clients in the system ... but not always).*
2. Define the **state space** for X_t (set of all possible values).
3. Check/prove that X_t is Markovian.
4. Draw the shape of the **transition diagram**.
5. Compute the transition rates for each state. When X_t enters state i:

   A. Competition method

   - draw for each state $j \neq i$ a random time t_{ij} with exponential distribution $\mathcal{E}(\alpha_{ij})$ needed to go from state i to state j *(e.g., an arrival in the MM1 will take a time $t_{i,+1}$ with rate $\alpha_{i,i+1} = \lambda$).*
   - if the minimum of the t_{ij} is t_{ik} then the process jumps to state k after t_{ik} *(e.g. in the MM1 the next arrival competes with the next departure. The first to occur decides the next transition.)*

   Then the rates are $q_{ij} = \alpha_{ij}$.

   B. Sojourn time method

   - the process remains in state i for a time $t_i \sim \mathcal{E}(\beta_i)$ (sojourn time)
   - after this time is over, the process immediately jumps to another state j chosen with probability p_{ij}.

   Then the rates are $q_{ij} = p_{ij}\beta_i$.
6. Remember that $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$

CTMC recipe (2)

1. Complete the transition diagram with the rates.
2. If the process is a birth-and-death process, check the stability condition and use the theorem for the stationary distribution

$$\pi(i) = \frac{\prod_{k=0}^{i-1} \lambda_k}{\prod_{k=1}^{i} \mu_k} \pi_0$$

3. otherwise write the balance equations :

$$\pi_i \sum_{j \neq i} q_{ij} = \sum_{j \neq i} q_{ji} \pi_j$$

   then solve them, up to a constant, usually π_0.

4. Determine the stability condition and the costant π_0 using the normalisation equation

$$\sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i = 1$$

Some examples of continuous-time Markov chains (CTMC)

- M/M/1
- maintenance model
- gaz diffusion model (Ehrenfest)
- population dynamics (biology)
- chemical reaction models
- queuing systems

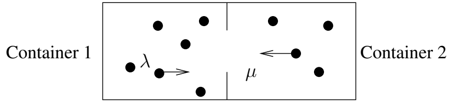
Faulty machines model

- 1 main server M, high quality
  - Up time: $\sim \mathcal{E}(\beta)$
  - Repair time: $\sim \mathcal{E}(\alpha)$
- 1 secondary server S for backup
  - Up time: $\sim \mathcal{E}(\mu)$
  - Repair time: $\sim \mathcal{E}(\lambda)$

Exercise

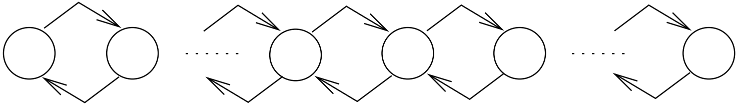
Define a CTMC model and give the transition diagram and infinitesimal generator.

Continuous-time Ehrenfest urn model / Engset model



1. Every particle changes sides after a random time $\sim \mathcal{E}(\alpha)$ (symmetric case)
2. Particles in urn 1 go to urn 2 with rate λ, while particles in urn 2 go to urn 1 with rate μ (more general case)

- draw the transition diagram
- compute the transition rates
- write the balance equations and compute steady-state distribution



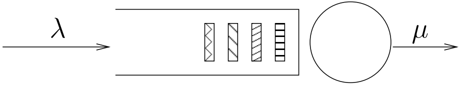
Solution to Ehrenfest model (symmetric case)

1. Define a state: $X(t) =$ number of particles in urn 1.
   State space: $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, N\}$.
2. Prove $X(t)$ is a CTMC: because given $X(t)$, past trajectories do not bring information on future dynamics (memoryless property of the exponential).
3. Compute transition rates:
   - when $X(t) = 0$, all particles are in the *other* urn. Then the transition rate is $q_{0,1} N\mu$ (competition between N particles, each running at rate μ)
   - more generally when $X(t) = i$ then
     - the i particles compete to leave urn 1 : $q_{i,i-\mathbf{1}} = i\lambda$
     - the $N - i$ particles in the other urn compete to come into urn 1 : $q_{i,i+\mathbf{1}} = (N - i)\mu$
   - it is a birth-death process because 2 particles cannot change sides at the exact same time, so transitions only go from i to $i - 1$ or $i + 1$.

Outline

1. Processus de Poisson
2. Chaînes de Markov à temps continu
3. Reversibility
4. Processus de Naissance et de Mort
5. Conclusion
6. Files d'attente classiques

M/M/1 (Rappel)



file M/M/1

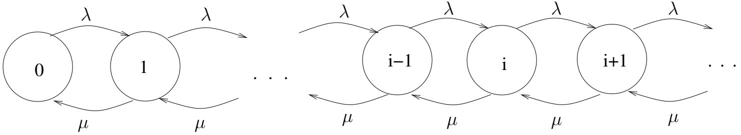
- capacité infinie
- arrivées Poisson(λ)
- temps de service Exp(μ)
- discipline FIFO

Definition

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ est l'intensité de trafic de la file d'attente.

M/M/1 (analyse)

Soit $X(t)$ le nombre de clients à l'instant t. $X(t)$ est un processus de naissance et de mort avec $\lambda_i = \lambda$ et $\mu_i = \mu$.

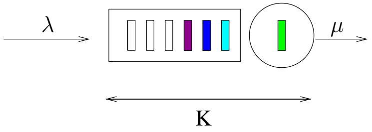


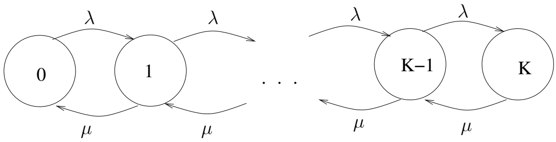
Resultats pour la M/M/1

1. Stable ssi $\rho < 1$
2. Clients suivent une distribution géometrique $\forall i \in \mathbb{N}, \pi_i = (1 - \rho)\rho^i$
3. Nb moyen de clients $\mathbb{E}[X] = \frac{\rho}{(1-\rho)}$
4. Temps de réponse moyen $\mathbb{E}[T] = \frac{1}{\mu-\lambda}$

M/M/1/K (Rappel)

En réalité les buffers sont finis! M/M/1/K est une file d'attente à blocage.



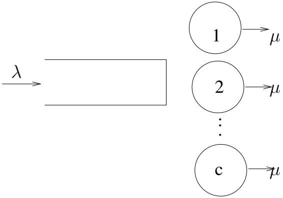


Resultats M/M/1/K

Distribution Géometrique à espace d'états finis:

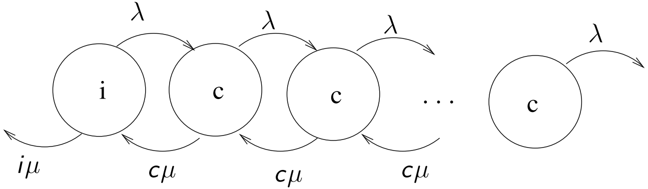
$$\pi(i) = \frac{(1-\rho)\rho_i}{1-\rho^{K+1}}$$

file M/M/c



- capacité infinie
- $\lambda_i = \lambda$
- $\mu_i = min(i, c)\mu$

$$\pi(i) = \begin{cases} \pi(0)\frac{\rho^i}{i!} & 0 \leq i \leq c \\ \pi(0)\frac{\rho^i c^{c-i}}{c!} & i \geq c \end{cases}$$



M/M/c (2)

$$\mathbb{P}[attente] = \mathbb{P}[X(t) \geq c] = \sum_{i=c}^{\infty} \pi(i)$$

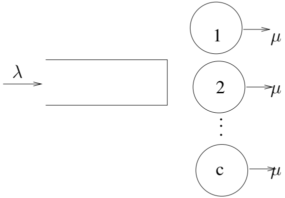
Formule d'Erlang C

Probabilité que les c ressources soient occupées:

$$\mathbb{P}[attente] = \frac{\frac{\rho^c}{c!}\frac{1}{1-\rho/c}}{\sum_{i=0}^{c}\frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^c}{c!}\frac{1}{1-\rho/c}}$$

Une autre formule d'Erlang

Même file mais avec blocage: M/M/c/c (ex: téléphone)



Pas d'attente: clients servis ou perdus.

- états finis
- $\lambda = 0$ si $X(t) \geq c$

On obtient: $\pi(i) = \pi(0)\frac{\rho^i}{i!}$ et $\pi(0) = \left(\sum_{i=0}^{c} \frac{\rho^i}{i!}\right)^{-1}$

Formule de perte d'Erlang (1917)

$$\mathbb{P}[blocage] = \pi(c) = \frac{\frac{\rho^c}{c!}}{\sum_{i=0}^{c} \frac{\rho^i}{i!}}$$

Cette formule présente en outre la propriété essentielle d'être valide quelle que soit la distribution de service.