NOM :

Quick du 27 septembre 2016 (Durée $\frac{1}{2}$ heure)

Aucun document, ni calculette ou tout objet contenant un processeur n'est autorisé.

Problème : un gagnant parmi K

Dans une partie, K joueurs jettent chacun une pièce de monnaie ($K \geqslant 3$). Un joueur gagne une partie si son tirage est différent de celui de tous les autres joueurs.

1. Proposer un modèle de cette situation.

Solution: On modélise la situation par un ensemble de K variables aléatoires $\{X_1, \cdots, X_K\}$, avec $X_i = 1$ si le joueur i obtient pile, $X_i = 0$ s'il obtient face. Le problème "physique" nous permet de faire les hypothèses statistiques suivantes :

- les variables aléatoires X_i sont indépendantes (on suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les lancers des différents joueurs) ;
- les variables X_i ont la même loi, (les pièces sont de même nature) ;
- les variables aléatoires X_i sont de loi uniforme (on suppose que les pièces ne sont pas biaisées).

On note G_i l'événement "le joueur i gagne la partie", c'est à dire $X_i \neq X_j$ pour tout $j \neq i$

$$\begin{aligned} G_i &= (X_1 = 0, X_2 = 0, \cdots, X_{i-1} = 0, X_i = 1, X_{i+1} = 0, \cdots X_K = 0) \\ &\quad \text{ou } (X_1 = 1, X_2 = 1, \cdots, X_{i-1} = 1, X_i = 0, X_{i+1} = 1, \cdots X_K = 1). \end{aligned}$$

et l'événement G "la partie a un gagnant"

$$G = (G_1 \cup \cdots \cup G_K).$$

Il faut donc évaluer la probabilité de G.

2. Calculer la probabilité p_K que la partie ait un gagnant.

Solution:

Approche 1 On calcule la probabilité que le joueur i gagne la partie.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_i) &= \mathbb{P}\left((X_1 = 0, X_2 = 0, \cdots, X_{i-1} = 0, X_i = 1, X_{i+1} = 0, \cdots X_K = 0)\right. \\ &\quad \left.\text{ou } (X_1 = 1, X_2 = 1, \cdots, X_{i-1} = 1, X_i = 0, X_{i+1} = 1, \cdots X_K = 1)\right); \\ &\quad \text{comme l'union est disjointe;} \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, \cdots, X_{i-1} = 0, X_i = 1, X_{i+1} = 0, \cdots X_K = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, \cdots, X_{i-1} = 1, X_i = 0, X_{i+1} = 1, \cdots X_K = 1) \\ &\quad \text{par indépendance des variables } X_i; \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 0)\cdots\mathbb{P}(X_{i-1} = 0)\mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_{i+1} = 0)\cdots\mathbb{P}(X_K = 0) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1)\cdots\mathbb{P}(X_{i-1} = 1)\mathbb{P}(X_i = 0)\mathbb{P}(X_{i+1} = 1)\cdots\mathbb{P}(X_K = 1); \\ &\quad \text{par uniformité des variables } X_i \text{ sur } \{0, 1\}; \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^K + \left(\frac{1}{2}\right)^K = \left(\frac{1}{2}\right)^{K-1}. \end{aligned}$$

L'événement G ="la partie a un gagnant" correspond à l'union des événement G_i et

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}(G_1 \cup \cdots \cup G_K);\\
&\quad \text{les événements } G_i \text{ sont disjoints (il ne peut y avoir qu'un seul gagnant par partie) ;}\\
&= \mathbb{P}(G_1) + \cdots + \mathbb{P}(G_K);\\
&\quad \text{et en remplaçant par la valeur obtenue ci-dessus,}\\
&= K\left(\frac{1}{2}\right)^{K-1}.
\end{aligned}$$

Approche 2 On note S_K le nombre de 1 obtenus dans une partie $S_K = X_1 + \cdots + X_K$. Comme somme de K variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ S_K suit une loi binomiale $\mathcal{B}in(K, \frac{1}{2})$. La partie a un gagnant correspond à l'événement G, $(S_K = 1)$, un seul joueur a obtenu pile, ou $(S_K = K-1)$, un seul joueur a obtenu face.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G) &= \mathbb{P}\left((S_K = 1) \text{ ou } (S_K = K-1)\right);\\
&\quad (S_K = 1) \text{ et } (S_K = 1) \text{ sont disjoints donc}\\
&= \mathbb{P}(S_K = 1) + \mathbb{P}(S_K = K-1);\\
&= \binom{K}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{K-1} + \binom{K}{K-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{K-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\\
&= K\left(\frac{1}{2}\right)^{K-1}.
\end{aligned}$$

3. Écrire un code R qui génère un échantillon de N parties.

Solution:

```
> # Chunk 1
> N = 10000;            # taille de l'échantillon (nombre de parties)
> K=10;                 # nombre de joueurs
> S = rep(x = 0,N);     # nombre de piles obtenus par partie
> for(i in 1:K) {
+   S=S+sample(x = c(0,1),size = N,replace = T); # tirage sur les
      # N parties du joueur i
+ }
> nb = sum(S==1) + sum(S==(K-1)) # calcule le nombre de parties avec
                            # exactement 1 pile ou exactement 1 face
>
> "Fréquence (empirique) de parties gagnées :"
[1] "Fréquence (empirique) de parties gagnées :"
> nb/N
[1] 0.02
> "Probabilité (théorique) de gagner une partie"
[1] "Probabilité (théorique) de gagner une partie"
> K/2^{K-1}
[1] 0.01953125
```

Il ne reste plus qu'à faire un test statistique d'adéquation (ce qui sera vu en fin de semestre)

4. On note T_K le nombre de parties nécessaires pour avoir un gagnant. Calculer la loi de T_K et donner sa moyenne.

Solution: Les parties successives sont supposées indépendantes entre elles donc T_K a une loi géométrique de paramètre p_K. (Première apparition d'un pile dans une séquence de lancers d'une pièce biaisée de paramètre p_K). Notons $Y_1, \cdots, Y_n, \cdots$ les résultats des parties successives.

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{si la partie } n \text{ admet un gagnant ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après le système physique modélisé, on suppose que les variables aléatoires Y_i sont indépendantes entre elles de même loi de Bernoulli de paramètre $p_K = \mathbb{P}(Y_i = 1)$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_K = n) &= \mathbb{P}(Y_1 = 0, \cdots, Y_{n-1} = 0, Y_n = 0) \\ & \quad \text{indépendance des } Y_i \\ &= \mathbb{P}(Y_1 = 0) \cdots \mathbb{P}(Y_{n-1} = 0)\mathbb{P}(Y_n = 0) \\ & \quad \text{en utilisant la loi des } Y_i \\ &= \underbrace{(1 - p_K) \cdots (1 - p_K)}_{n-1 \text{ fois}} p_K = (1 - p_K)^{n-1} p_K. \end{aligned}$$

Sa moyenne est

$$\mathbb{E}T_K = \frac{1}{p_K} = \frac{2^{K-1}}{K}.$$

5. Que pensez-vous de ce jeu ?

Solution: La probabilité d'avoir un gagnant diminue très fortement (décroissance exponentielle). Par exemple, partir de 11 joueurs la probabilité d'avoir un gagnant est de l'ordre de 1%. Ce qui entraine des séquences de parties de plus en plus longues pour avoir un gagnant lorsque K est grand.

Pour K petit le jeu permet de choisir (élire) un joueur parmi K, chacun jouant sa propre pièce (non biaisée) on garantit que le choix est équitable. En effet, la probabilité que le joueur i gagne est

$$\mathbb{P}(G_i|G) = \frac{\frac{1}{2^{K-1}}}{K\frac{1}{2^{K-1}}} = \frac{1}{K}.$$

C'est un premier exemple d'algorithme randomisé d'élection (voir le cours du semestre 2 en algorithmique distribuée). L'inconvénient est qu'il ne passe pas à l'échelle.