



Devoir 1 : Évolution de la couleur des yeux au fil des âges

La couleur des yeux est un caractère héréditaire influencé par plusieurs *gènes*. Chaque gène possède deux *allèles*, l'un issu du père et l'autre de la mère. Les allèles donnant la couleur bleue sont récessifs par rapport aux allèles donnant la couleur marron. Ainsi, si un individu possède deux allèles “bleus”, ses yeux sont bleus mais dès lors qu'un de ses deux allèles est “marron”, ses yeux sont marrons.

Nous nous intéressons dans ce devoir à l'évolution de la couleur des yeux d'une population au fil des générations. Pour simplifier l'étude de ce problème nous ferons les hypothèses suivantes :

- On considère des populations constituées d'exactly P individus. La première population sera notée \mathcal{P}_0 (et est donc une donnée du problème). On notera \mathcal{P}_i la i -ème génération d'individus avec i allant de 1 à I_{\max} . \mathcal{P}_i est donc le résultat d'un processus aléatoire (d'où la couleur rouge pour ceux qui visualisent le pdf sur un écran...).
- On notera BB_i (resp. MM_i) le nombre d'individus dont les deux allèles sont bleus (resp. marrons) dans la population \mathcal{P}_i . Il y a donc $P - BB_i - MM_i$ individus ayant exactement un allèle bleu et un allèle marron. On peut donc noter $\mathcal{P}_i = (BB_i, MM_i)$.
- L'évolution des populations est synchrone et stochastique. Autrement dit, chaque population \mathcal{P}_{i+1} est obtenue en créant P individus à partir de \mathcal{P}_i . On crée chacun des P individus de la population \mathcal{P}_{i+1} en sélectionnant au hasard un père et une mère dans \mathcal{P}_i (pour simplifier on ne distinguera pas le sexe des parents dans \mathcal{P}_i) et en sélectionnant au hasard un allèle de chacun de ces deux parents.

Dans la suite, nous allons donc étudier l'évolution du système pour différentes valeurs de P , de I et différentes populations initiales \mathcal{P}_0 .

Pour cela, vous utiliserez R. Vous publierez vos observations sur <http://rpubs.com> à l'aide de Rstudio et enverrez l'url (ou à défaut le fichier html résultant) à arnaud.legrand@imag.fr et à florence.perronnin@imag.fr **avant le 4 novembre à minuit** en indiquant la chaîne [RICM4-PS] dans le sujet du message.

Afin de s'assurer que nous puissions reproduire vos résultats, vous prendrez soin de fixer la valeur de la graine du générateur aléatoire à l'aide de la fonction `set.seed`.

Question 0 : Décrire votre intuition Avant de vous lancer dans la programmation, essayer de répondre aux différentes questions, l'une après l'autre (c'est important), en n'utilisant que votre intuition. Dans une première section du document publié sur [rpubs](http://rpubs.com), vous indiquerez donc votre intuition sur l'évolution de la composition des populations. Que va-t-il se passer selon vous ? Comment va évoluer la proportion de personnes ayant les yeux bleus ?

Attention, le fait que cette intuition soit correcte ou pas n'aura aucune importance sur votre note finale. Décrire votre intuition a uniquement pour but que vous commenciez à réfléchir au problème et de réaliser à quel point sa propre intuition peut être correcte ou pas.

Vous analyserez, en fin de DM, cette intuition au vu des résultats statistiques observés.



Question 1 : Cas d'une petite population On s'intéresse dans cette question au cas d'une population de taille réduite, c'est-à-dire au cas où $P = 20$, à un horizon $I_{\max} = 20$. Vous représenterez graphiquement au moins $N = 10$ réalisations des trajectoires de $(\text{BB}_i/P, \text{MM}_i/P)$ en partant des populations \mathcal{P}_0 initiales suivantes :

- $\mathcal{P}_0 = (\text{BB}_0, \text{MM}_0) = (4, 12)$
- $\mathcal{P}_0 = (\text{BB}_0, \text{MM}_0) = (12, 4)$
- $\mathcal{P}_0 = (\text{BB}_0, \text{MM}_0) = (5, 5)$

Ces configurations sont données à titre d'exemple et vous êtes encouragés à en essayer d'autres (en particulier des horizons I_{\max} plus longs ainsi que d'autres \mathcal{P}_0) pour bien comprendre ce qu'il se passe.

Vous expliquerez et commenterez de façon pertinente vos observations.

Question 2 : Cas d'une grande population On s'intéresse maintenant au cas $P = 2000$ et $I_{\max} = 100$ et on partira de situations \mathcal{P}_0 initiales équivalentes :

- $\mathcal{P}_0 = (400, 1200)$
- $\mathcal{P}_0 = (1200, 400)$
- $\mathcal{P}_0 = (500, 500)$

Vous expliquerez et commenterez de façon pertinente vos observations et comparerez le comportement de ce système par rapport au précédent.

Question 3 : Cas d'une petite population avec préservation On s'intéresse cette fois à nouveau au cas d'une population de taille réduite (i.e., $P = 20$) mais à un horizon $I_{\max} = 2000$. On modifie cette fois légèrement la règle d'évolution de façon à ce que l'on ait toujours $\text{BB}_i \geq 1$ et $\text{MM}_i \geq 1$. Pour cela, on ne tire au hasard que $P - 2$ individus (selon la règle classique) pour construire \mathcal{P}_i et on y ajoute deux individus, l'un ayant deux allèles bleus, et l'autre ayant deux allèles marrons.

En quoi cette modification modifie-t-elle la dynamique de la question 1. Qu'en pensez-vous ? Le système vous semble-t-il "stable", certaines zones semblent-elles plus "attractives" que d'autres ? ...

Question 4 : Avez-vous changé d'avis ? Au delà des aspects purement techniques de la chose que ce devoir a pu vous apprendre, le résultat de cette étude est-il conforme à votre intuition initiale ? Pensez-vous à d'autres hypothèses que vous pourriez tester ? Si vous deviez modifier le modèle proposé, quelles seraient vos priorités ?