Examen du 10 janvier 2014 (Durée 2 heure)

Une feuille manuscrite recto-verso est autorisée, les autres documents ne sont pas autorisés.
La calculatrice est autorisée.
Il sera tenu compte de la rigueur de la rédaction et de la clarté de la présentation.

Pour tout l'examen on suppose que l' on dispose d'un générateur aléatoire **Random**() qui fournit une séquence de nombres réels aléatoires indépendants de même loi uniforme sur $[0, 1[$.

Exercice 1 : De la vache $\beta\pi$ ...

Générateur-Π_1()

X = **Random** ()
Y = **Random** ()
if $X^2 + Y^2 \leqslant 1$ **then** $Z = 1$ **else** $Z = 0$
return $4 \times Z$

Question 1.1 : Loi de Z

Donner la loi de la variable Z calculée par cet algorithme, calculer sa moyenne et sa variance. En déduire la moyenne et la variance de la valeur retournée par l'algorithme. *Indication : faire un dessin.*

Question 1.2 : Estimation de π

Proposer un algorithme de simulation qui permette le calcul approché de π, quelle est la taille de l'échantillon nécessaire pour avoir une précision de l'ordre de 10^{-2} avec une confiance de 95% ?

Générateur-Π_2()

X = **Random** ()
Y = **Random** ()
if $(Y \leqslant 1 - X)$ **then** $(X, Y) = (1 - Y, 1 - X)$
if $X^2 + Y^2 \leqslant 1$ **then** $Z = 1$ **else** $Z = 0$
return $1 + 2 \times Z$

Question 1.3 : Loi de Z

Quel est l'effet du premier **if** ? Quelle est la loi de (X, Y) après le passage de la première instruction **if** ? Donner la loi de la variable Z calculée par cet algorithme, calculer sa moyenne et sa variance. En déduire la moyenne et la variance de la valeur retournée par l'algorithme. *Indication : refaire un dessin.*

Question 1.4 : Estimation de π

Proposer un algorithme de simulation qui permette le calcul approché de π, quelle est la taille de l'échantillon nécessaire pour avoir une précision de 10^{-2} avec une confiance de 95% ?

Question 1.5 : Conclusion

Faire la comparaison des deux algorithmes proposés et commenter les résultats.

Exercice 2 : Une grosse ville...

Dans le problème de croissance des villes, le professeur Nimbus affirme que si la configuration initiale des villes est 2 individus dans la ville A et 1 individu dans la ville B alors la limite de la proportion d'individus dans la ville A converge en probabilité vers une variable aléatoire de densité $f(x) = 2(1-x)$ (sur l'intervalle $[0, 1[$).

Afin de s'en convaincre le professeur Nimbus réalise une simulation et génère un échantillon de taille $N = 400$. Il observe les résultats suivants

$Intervalle$	$[0, 0.2[$	$[0.2, 0.4[$	$[0.4, 0.6[$	$[0.6, 0.8[$	$[0.8, 1[$
$Observation$	151	98	83	52	16

Question 2.1 : Loi théorique

Sous l'hypothèse que le professeur Nimbus ait raison, calculer la probabilité théorique de chacun de ces 5 intervalles. *Indication : faire encore un dessin.*

Question 2.2 : Analyse statistique

Que pensez-vous des résultats observés par le professeur Nimbus, êtes vous d'accord avec lui ?

Exercice 3 : Séquences de 1 ...

On dispose d'une source de bits aléatoires que l'on modélise par une suite de variables aléatoires $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes de même loi de Bernoulli, $\mathcal{B}(p)$. On s'intéresse à la première apparition d'une suite de k bits à "1". On note Y_k le nombre nécessaire de bits pour observer la première séquence de k bits à "1".

Question 3.1 : Récurrence

Montrer, en l'illustrant par un dessin, que

$$Y_{k+1} = Y_k + 1 + \begin{cases} 0 \text{ si } \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (à compléter)} \\ Y'_{k+1} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Expliciter la condition du cas "0". Que représente Y'_{k+1} ? Que pouvez-vous dire de sa loi ?

Question 3.2 : Calcul de la moyenne

Déduire de la question précédente une relation de récurrence sur $\mathbb{E}Y_k$ et montrer que

$$\mathbb{E}Y_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p^i}.$$

Question 3.3 : Test d'un générateur aléatoire

Proposer un test statistique permettant d'invalider un générateur de bits aléatoires indépendants et uniformes sur un critère de longueur de blocs de bits à "1".

Exercice 4 : Générateur de vecteurs ...

Question 4.1 :

Écrire un algorithme générant uniformément un vecteur de n bits ayant **au plus** k bits à 1.