Évaluation de performances

Examen du 21 avril 2015
Durée : 2h
Documents : Notes de cours et de TD autorisées

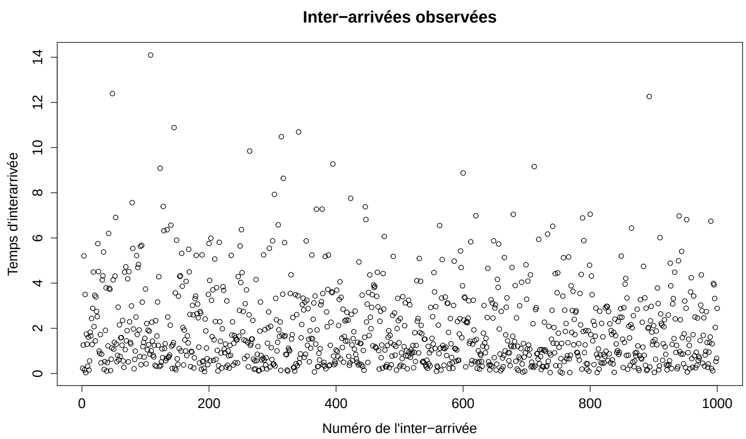
.

Serveur Web

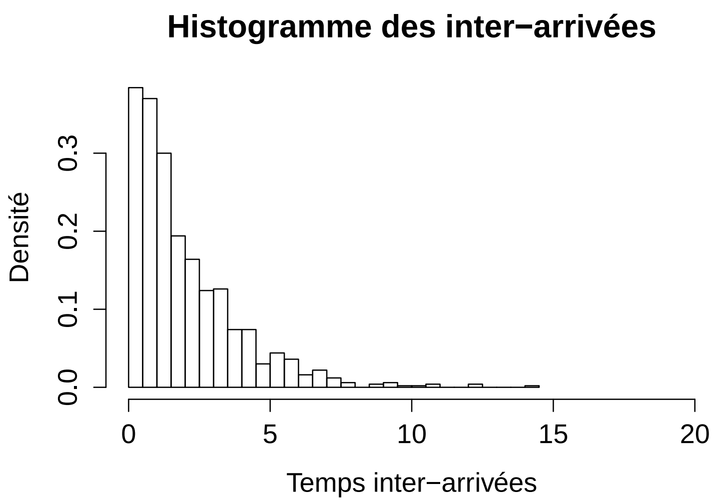
On enregistre les requêtes arrivant sur un serveur web sur une période d'environ 1 heure. Le nombre d'échantillons collectés est 1000, les valeurs aberrantes ayant été éliminées par une première analyse. Lors de l'expérience, aucune perturbation ou changement notable de l'environnement n'a été détecté.

On obtient ainsi un échantillon des interarrivées de requêtes et on utilise le logiciel R pour en faire l'analyse. On utilise les commandes suivantes sur l'échantillon `x` :

```
>plot(x,main="Inter-arrivées observées",
       xlab="Numéro de l'inter-arrivée",ylab="Temps d'interarrivée")
```




```
>hist(x,probability=TRUE,xlim=c(0,20),main="Histogramme des inter-arrivées",
       xlab="Temps inter-arrivées",ylab="Densité",nclass=25)
```



```
>summary(x)
    Min.  1st Qu.   Median     Mean  3rd Qu.     Max.
 0.02349  0.64440  1.37100  2.01200  2.88300 14.10000
> sd(x)
[1] 1.889931
```

Question 1 : Analyse d'échantillon

Justifier cette démarche d'analyse : quelles remarques ont été faites entre les différents appel des commandes `plot`, `hist` et `summary/sd` ?

Question 2 : Modélisation

Quels arguments peut-on donner pour modéliser les arrivées par un Processus de Poisson (dont on précisera le paramètre) ? Quelles sont les hypothèses supplémentaires qu'il faudrait éventuellement vérifier ?

La vie des gangsters

Optionnel pour les étudiants en mobilité internationale

(Exercice adapté de Initiation aux Probabilités et aux chaînes de Markov, Pierre Brémaud, Springer-Verlag, réédition de 2009.)

Trois personnages armés, A, B, et C, se trouvent soudainement en présence au détour d'un cimetière et sur ce, se mettent tout naturellement à se tirer dessus. Chaque survivant tire sur un autre survivant de son choix toutes les 2 secondes. Les probabilités d'atteindre la cible pour A, B, et C à chaque tir sont respectivement α, β et γ. A est le plus haï des trois, et donc, tant qu'il vit, B et C s'ignorent et lui tirent dessus. Pour des raisons historiques que nous ne développerons pas, A ne peut pas sentir B, et donc il ne tire que sur B tant que ce dernier est vivant. Le bienheureux C n'est visé que lorsqu'il se trouve en présence de A seul ou de B seul.

Question 1 : Modélisation

Proposer un modèle pour cette situation et calculer la probabilité de survie de chacun des personnages en fonction de α, β et γ.

Question 2 : Culturelle (non notée)

Proposer une association entre A,B et C avec Clint Eastwood, Lee Van Cleef et Eli Wallach.

Boite aux lettres

On considère un serveur de mail qui est consulté régulièrement par un utilisateur. On suppose que le serveur reçoit un flot de mails à destination de l'utilisateur avec un débit de λ mails par unité de temps. L'utilisateur relève son mail lorsqu'il le désire et on observe qu'il relève son mail en moyenne μ fois par unité de temps. Lorsque l'utilisateur consulte sa boite mail il télécharge tous les mails qui sont sur le serveur.

Question 1 : Modélisation

Proposer un modèle d'arrivées de mails sur le serveur. Proposer un modèle du processus de consultation des mails par l'utilisateur. Proposer un modèle markovien en temps continu du nombre de messages présents sur le serveur (donner le graphe d'état et les taux de transition).

Question 2 : Performances

Calculer, en le justifiant, le nombre moyen de messages présents sur le serveur. Pour cela on calculera la distribution stationnaire de la chaîne en fonction du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$.

Question 3 : Dimensionnement

En supposant dans cette question que la capacité de la boite mail sur le serveur est C, calculer le taux de perte de messages (perdus car la boite était pleine). Calculer la capacité de la boite pour que le taux de perte soit inférieur à un ε donné *On rappelle que* $a^b = e^{b \log a}$.

L'utilisateur laisse le soin de relever son courrier à son application mail. Celui-ci relève donc périodiquement le courrier toutes les D unités de temps. La capacité du serveur est supposée infinie dans les 2 questions suivantes.

Question 4 : Modèle étendu

Le nombre de messages présents sur le serveur est-il toujours Markovien ? Quelle est la loi du nombre de messages relevés par l'application mail ? Pour quelle valeur de D le nombre moyen de messages relevés est 1 ?

Question 5 : Stabilité

On suppose que l'application mail ne peut relever que K messages toutes les D unités de temps (déterministe). Le système peut-il devenir instable, pourquoi et si oui quelle est sa condition de stabilité ?

Question 6 : Modèle général

On suppose que le serveur de mail a une capacité de C messages, que la relève des messages est périodique de période D et que le nombre maximum de message relevés est K.
Construire une chaîne de Markov incluse dans le processus du nombre de messages sur le serveur (on précisera l'équation d'évolution vérifiée et les probabilités de transition associées).

Question 7 : Synthèse

Après un résumé des résultats obtenus, commenter cette modélisation, identifier ses points forts et ses points faibles. Suggérer des améliorations.