Fiche 3 : Génération d'arbres aléatoires

Un premier générateur

On dispose d'un générateur iunif(int n) qui génère un entier uniformément distribué sur $\{0, \cdots, n\}$. D'autre part on dispose d'un type arbre binaire et de deux constructeurs d'arbres binaires :
- arbre_vide() crée un arbre vide ;
- assemble_arbre(arbre x, arbre y) prend en argument les arbres x et y et renvoie un arbre binaire dont le sous-arbre gauche (resp. droit) est x (resp. y).

Considérons l'algorithme de génération suivant :

```
arbre creer_arbre(int n) {
  arbre a1,a2 ;
  if (n==0) then
    return arbre_vide() ;
  else
    q=iunif(n-1) ;
    a1=creer_arbre(q) ;
    a2=creer_arbre(n-q-1) ;
    return assemble_arbre(a1,a2) ;
  end if
}
```

Question 1.1 : Montrer qu'un appel à creer_arbre(n) génère un arbre ayant n sommets. Montrer que tout arbre A de n sommets peut être généré par creer_arbre(n) (la probabilité de générer A est strictement positive).

Question 1.2 : Le générateur est-il de loi uniforme ?

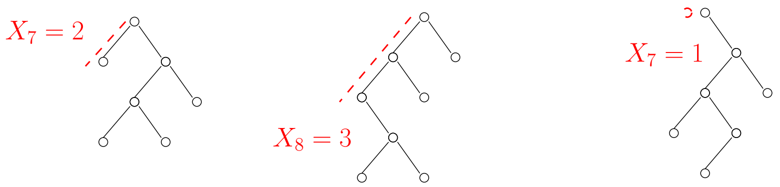

FIGURE 1 – Exemples de réalisations de chemins à gauche pour $n = 7$ et $n = 8$

Question 1.3 : Soit X_n le nombre de sommets sur le chemin le plus à gauche dans l'arbre généré ayant n sommets (la définition d'un chemin "le plus à gauche" est illustrée en figure 1).
Calculer la loi de X_0, X_1, X_2 et X_3. vérifier que $\mathbb{E}X_3 = 1 + \frac{1}{3}(\mathbb{E}X_0 + \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2)$.
Question 1.4 : Montrer que ;

$$\mathbb{E}X_n = 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}X_i. \tag{1}$$

En déduire qune expression de $\mathbb{E}X_n$ en fonction de $\mathbb{E}X_{n-1}$. Calculer $\mathbb{E}X_n$ et donner son équivalent pour n grand.

Question 1.5 : À quel algorithme cette construction vous fait-elle penser ?

Générateur uniforme aléatoire

On dispose du générateur unif classique qui fournit un nombre réel dans $[0, 1[$.
Question 2.1 : On note C_n le nombre d'arbres comportant n nœuds. Donner les valeurs de C_n, pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. Donner une relation de récurrence sur le nombre C_n d'arbres de taille n.

Question 2.2 : Algorithme Proposer un algorithme de génération d'arbres distribués uniformément. Prouver votre algorithme.

Question 2.3 : Calcul de C_n Donner une formule explicite pour C_n. On pourra utiliser la série génératrice associée à la suite C_n ou bien faire un peu de bibliographie sur les nombres de Catalan. . .