Aide-mémoire sur la file $M/M/1$

Concept : Modèle de base des réseaux de files d'attente
Méthode : Formulaire

On considère une file d'attente simple avec 1 serveur. On suppose que le processus d'arrivée est un processus de Poisson de paramètre λ. Les temps de services sont supposés indépendants de même loi exponentielle de paramètre λ.

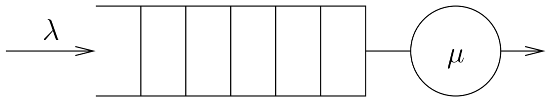

FIGURE 1 – File $M/M/1$

Le processus aléatoire $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, nombre de clients dans la file à l'instant t est un processus de Markov en temps continu à valeur dans $\mathbb{N}$.

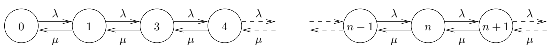

FIGURE 2 – Graphe d'état associé au processus $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ associé à la file $M/M/1$.

Charge On définit la charge de la file par $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. La file est stable si et seulement si $\rho < 1$.

$$\text{Taux d'utilisation du serveur} = \rho$$

Distribution stationnaire Soit π_n la probabilité stationnaire d'avoir n clients dans la file lorsque celle-ci est stable.

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n$$

Nombre moyen de clients Soit $\overline{N}$ le nombre moyen de clients dans la file à l'état stationnaire.

$$\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Temps moyen de réponse Soit W le temps de réponse d'un client à l'état stationnaire. Pour une file FIFO, W est de loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$. Dans le cas d'une discipline de service quelconque on applique la formule de Little $\overline{N} = \lambda\overline{W}$.

$$\overline{W} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Aide-mémoire sur la file $M/M/1$

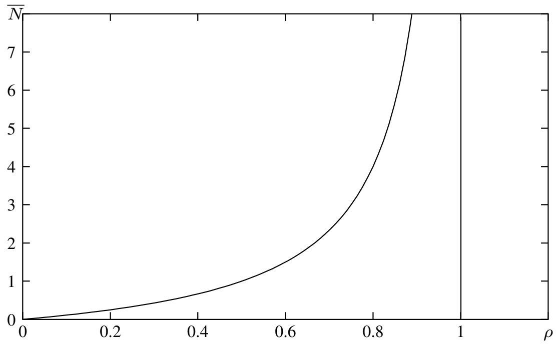

FIGURE 3 – Nombre moyen de clients dans une file $M/M/1$ à l'état stationnaire

Dépassement de capacité Soit $D(\rho, K)$ la probabilité de dépasser K clients dans la file à l'état stationnaire (approximation du taux de perte pour une capacité K grande).

$$D(\rho, K) = \rho^K$$

Période d'activité Soit $\overline{B}$ la durée moyenne d'activité du serveur.

$$\overline{B} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Aide mémoire sur la file $M/M/1/C$

On considère une file d'attente simple avec 1 serveur et une capacité C. Les hypothèses sont les mêmes que pour la file $M/M/1$, un client arrivant et trouvant la file pleine est rejetté.

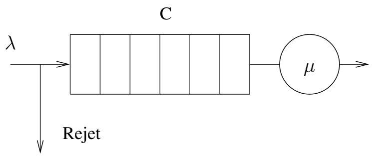

FIGURE 4 – File $M/M/1/C$

Le processus aléatoire $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, nombre de clients dans la file à l'instant t est un processus de Markov en temps continu à valeur dans $\{0, 1, \cdots, C\}$.

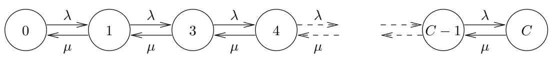

FIGURE 5 – Graphe d'état associé au processus $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ associé à la file $M/M/1/C$.

Charge On définit la charge de la file par $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. La file sera toujours stable.

$$\text{Taux d'utilisation du serveur} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{C+1}}$$

Aide-mémoire sur la file $M/M/1$

Distribution stationnaire Soit π_n la probabilité stationnaire d'avoir n clients dans la file lorsque celle-ci est stable.

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{C+1}}\rho^n & \text{pour } 0 \leqslant n \leqslant C \text{ et } \lambda \neq \mu, \\ \frac{1}{C+1} & \text{pour } 0 \leqslant n \leqslant C \text{ si } \lambda = \mu. \end{cases}$$

Nombre moyen de clients Soit $\overline{N}$ le nombre moyen de clients dans la file à l'état stationnaire.

$$\overline{N} = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1-(C+1)\rho^C+C\rho^{C+1}}{1-\rho^{C+1}} & \text{si } \lambda \neq \mu, \\ \frac{C}{2} & \text{si } \lambda = \mu. \end{cases}$$

Temps moyen de réponse Soit W le temps de réponse d'un client à l'état stationnaire. Pour une file FIFO, W une composée de lois exponentielles de transformée de Laplace, ic pour $\lambda \neq \mu$:

$$\mathcal{L}_W(t) = \mathbb{E}e^{-tW} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{C+1}}\frac{\mu}{t+\mu}\frac{1-\frac{\lambda}{t+\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{t+\mu}\right)^{C+1}}.$$

Pour le temps de réponse moyen on peut également utiliser la formule de Little.

Saturation La probabilité que le système soit plein, c'est également la probabilité de rejet d'un client

$$\mathbb{P}(Saturation) = \pi_C = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{C+1}}\rho^C & \text{pour } 0 \leqslant n \leqslant C \text{ et } \lambda \neq \mu, \\ \frac{1}{C+1} & \text{pour } 0 \leqslant n \leqslant C \text{ si } \lambda = \mu. \end{cases}$$

Convergence vers le régime stationnaire En ce qui concerne le comportement transitoire, on étudie le spectre du générateur infinitésimal Q

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice Q sont

$$\alpha_i = -(\lambda+\mu) \pm 2\sqrt{\lambda\mu}\cos\left(\frac{k\pi}{C}\right).$$