Coloration, Cocycles

QUESTION 1. – Une **k-coloration** d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est une fonction $c : S \to \{0, 1, ..., k-1\}$ telle que $c(u) \neq c(v)$ pour chaque arête (u, v). Autrement dit, les entiers $0, 1, ..., k-1$ représentent les k couleurs et les sommets adjacents doivent avoir des couleurs différentes.

1. Montrer que tout arbre peut être colorié uniquement avec 2 couleurs.
2. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.
   a. G est 2-chromatique (il existe une 2-coloration de G).
   b. G n'a aucun cycle de longueur impaire.
3. Soit d le degré maximum d'un sommet quelconque d'un graphe G. Montrer que G peut être colorié avec au plus $d + 1$ couleurs.
4. Montrer que si G a $O(|S|)$ arêtes alors G peut être colorié avec $O(\sqrt{(}|S|))$.

QUESTION 2. – Soit $G = (V, E)$ est un graphe connexe.

1) Montrer que pour toute partie propre de $A \subset V$ le cocycle associé $\Omega(A)$ est non vide.
2) En déduire que $|E| \geqslant |V| - 1$.

QUESTION 3. – Soit $G = (V, E)$ est un graphe. Montrer qu'un ensemble d'arcs E' est un cocycle si et seulement s'il existe une 2-coloration des sommets de G telle que les extrémités d'une arête quelconque appartenant à E' soient de couleurs différentes et celles d'une arête quelconque appartenant à $E \setminus E'$ soient de même couleur.

QUESTION 4. – Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire (c'est à dire que l'on peut dessiner ce graphe dans un plan sans que les arêtes se croisent) connexe avec $|V| \geqslant 1$. Ce graphe décompose le plan en un ensemble R de régions.

1) Montrer la formule d'Euler $|V| - |E| + |R| = 2$. On pourra faire une récurrence sur le nombre de régions en remarquant qu'une arête appartenant à un cycle est sur la frontière d'exactement deux régions.
2) Montrer que s'il y a au moins trois sommets alors $|E| \leqslant 3|v| - 6$. On utilisera le fait qu'une région est entourée par au moins 3 arêtes.
3) Montrer qu'il existe un sommet de degré au plus 5.
4) En déduire qu'il est possible de colorier les sommets du graphe avec 6 couleurs tel que deux sommets adjacents ne sont jamais de la même couleur.

O. BEAUMONT, H. FOURNIER, I. GUERIN-LASSOUS et A. LEGRAND