Arbres, Graphes Complets, Graphes Planaires

QUESTION 1. – Soit G un graphe et $\delta(G)$ le degré minimum du graphe G (i.e. le minimum des degrés des sommets de G). Montrer que si $\delta(G) \geq 2$ alors G contient un cycle.

QUESTION 2. – Montrer qu'un arbre quelconque T a au moins $\Delta(T)$ feuilles (Δ est le degré maximum du graphe).

QUESTION 3. – Montrer que les différents points sont équivalents :

i) $G = (V, E)$ est connecté et $|V| = |E|$.

ii) G est connecté et contient un seul cycle.

iii) Pour une arête e de G, $G - e$ est un arbre.

QUESTION 4. – Un *arbre binaire* est un arbre qui possède un unique sommet de degré 2, et dont tous les autres sommets sont de degré 1 ou 3. Les sommets de degré 1 sont appelés les *feuilles*, les sommets de degré 3 sont appelés les *nœuds internes* et le sommet de degré 2 est appelé racine. Un arbre binaire complet est un arbre binaire dont toutes les feuilles sont à la même distance de la racine (cette distance est appelée *profondeur* de l'arbre).

1) Quel est la parité du nombre de sommets d'un arbre binaire complet ?

2) Quel est le nombre de feuilles d'un arbre binaire complet en fonction du nombre de ses sommets ?

QUESTION 5. – Soit G un graphe connexe. Montrer qu'il existe un sommet u tel que $G - u$ reste connexe.

QUESTION 6. – Soit G un graphe non-orienté complet. Soit G' obtenu à partir de G en orientant chaque arête arbitrairement. Montrer qu'il existe un sommet à partir duquel on peut accéder à tous les sommets en empruntant un chemin de longueur au plus 2.

QUESTION 7. – Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Une k-coloration de G est une application $c : V \mapsto [\![1, k]\!]$ telle que $(u, v) \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$.

1) Montrer tout arbre est 2-coloriable.

2) Montrer que G est 2-coloriable si et seulement s'il n'a aucun cycle de longueur impaire.

3) Si on note $d = \Delta(G)$ le degré maximum du graphe, montrer que G est $d + 1$ coloriable.

QUESTION 8. – Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire (c'est à dire que l'on peut dessiner dans un plan sans que les arêtes se croisenr) connexe avec $|V| \geqslant 1$. Ce graphe décompose le plan en un ensemble R de régions.

1) Montrer la formule d'Euler $|V| - |E| + |R| = 2$. On pourra faire une récurrence sur le nombre de régions en remarquant qu'une arête appartenant à un cycle est sur la frontière d'exactement deux régions.

2) Montrer que s'il y a au moins trois sommets alors $|E| \leqslant 3|v| - 6$. On utilisera le fait qu'une région est entourée par au moins 3 arêtes.

3) Montrer qu'il existe un sommet de degré au plus 5.

4) En déduire qu'il est possible de colorier les sommets du graphe avec 6 couleurs tel que deux sommets adjacents ne sont jamais de la même couleur.

O. BEAUMONT, H. FOURNIER, I. GUERIN-LASSOUS et A. LEGRAND