Coloriages

QUESTION 1. – Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Une k-coloration de G est une application $c : V \mapsto [\![1, k]\!]$ telle que $(u, v) \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$.

1) Montrer tout arbre est 2-coloriable.
2) Montrer que G est 2-coloriable si et seulement s'il n'a aucun cycle de longueur impaire.
3) Si on note $d = \Delta(G)$ le degré maximum du graphe, montrer que G est $d + 1$ coloriable.

QUESTION 2. – Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire (c'est à dire que l'on peut dessiner dans un plan sans que les arêtes se croisent) connexe avec $|V| \geqslant 1$. Ce graphe décompose le plan en un ensemble R de régions.

1) Montrer la formule d'Euler $|V| - |E| + |R| = 2$. On pourra faire une récurrence sur le nombre de régions en remarquant qu'une arête appartenant à un cycle est sur la frontière d'exactement deux régions.
2) Montrer que s'il y a au moins trois sommets alors $|E| \leqslant 3|v| - 6$. On utilisera le fait qu'une région est entourée par au moins 3 arêtes.
3) Montrer qu'il existe un sommet de degré au plus 5.
4) En déduire qu'il est possible de colorier les sommets du graphe avec 6 couleurs tel que deux sommets adjacents ne sont jamais de la même couleur.

O. BEAUMONT, H. FOURNIER, I. GUERIN-LASSOUS et A. LEGRAND