CORRIGÉ DE LA CARACTÉRISATION DES SUITES GRAPHIQUES

ARNAUD LEGRAND

On rappelle qu'une suite finie d'entiers positifs $d = (d_1, , \ldots, d_n)$ est dite «*graphique*» s'il existe un graphe dont la suite des degrés des sommets est d.

Théorème 1. *Soit* $0 < d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ *une suite d'entiers. On définit* $d'_i = d_i - 1$ *pour* $n - d_n \leqslant i \leqslant n - 1$ *et* $d'_i = d_i$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n - d_n - 1$. *Montrer que* $(d_1, \ldots, d_n)$ *est graphique si et seulement si* $(d'_1, \ldots, d'_{n-1})$ *l'est.*

Démonstration. Il y a deux sens à montrer :

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit d une suite telle que d' est graphique. Montrons que d est graphique.

d' correspond donc à un graphe $G' = (\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, E)$ avec $d_{G'}(x_i) = d'_i$ pour tout i dans $[\![1, n-1]\!]$. Soit x_n un nouveau sommet. On va considérer le graphe $G = (\{x_1, \ldots, x_n\}, E \cup \{(x_n, x_{n-1}), (x_n, x_{n-2}), \ldots, (x_n, x_{n-d_n})\})$ définit en ajoutant le nouveau sommet x_n au graphe G' et en le reliant aux d_n sommets de plus haut degré de G'.

On a donc $d_G(x_n) = d_n$ et pour tout i dans $[\![n - d_n, n-1]\!]$, on a donc $d_G(x_i) = d_{G'}(x_i) + 1 = d'_i + 1 = d_i$. De même, pour tout i dans $[\![1, n - d_n - 1]\!]$, on a $d_G(x_i) = d_{G'}(x_i) = d'_i = d_i$.

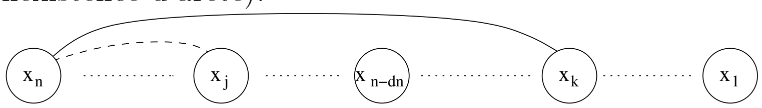
Le graphe G est donc un graphe tel que $d_G(x_i) = d'_i$ pour tout i dans $[\![1, n]\!]$. d est donc une suite graphique.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit d une suite graphique. Montrons que d' est graphique.

Soit $G = (\{x_1, \ldots, x_n\}, E)$ un graphe tel que $d_G(x_i) = d_i$ pour tout i dans $[\![1, n]\!]$. Dans la donstration précédente, on a rajouté x_n et on l'a relié aux d_n sommets de plus grand degré. Ici, on souhaiterait faire l'inverse, c'est à dire enlever x_n et les arêtes qui le relient aux d_n sommets de plus grand degré. Cependant, ces arêtes n'existent pas forcément pour tout graphe G réalisant d. On va donc montrer qu'on peut transformer notre graphe G en un graphe $\widetilde{G}$ qui réalise d et tel que x_n est relié à $x_{n-d_n}, \ldots, x_{n-1}$.

Supposons que x_n ne soit pas relié dans G à chacun des $x_{n-d_n}, \ldots, x_{n-1}$. Alors comme x_n est de degré d_n, il existe un sommet x_k de $\{x_1, \ldots, x_{n-d_n-1}\}$ qui est relié à x_n. De même, il existe un sommet x_j de $\{x_{n-d_n}, \ldots, x_{n-1}\}$ non relié à x_n.

On a donc la situation suivante (les traits pleins représentant des arêtes et les traits interrompus l'inexistence d'arête).



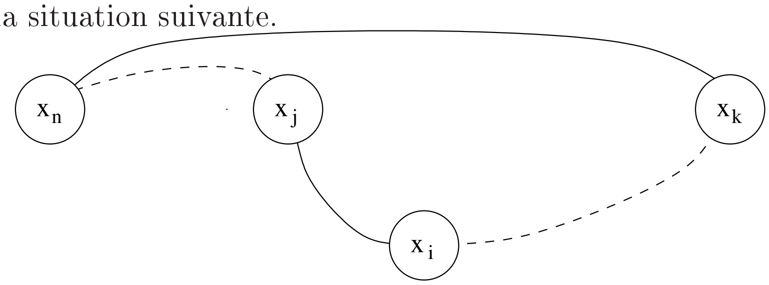
Date: 5 avril 2001.

Notons

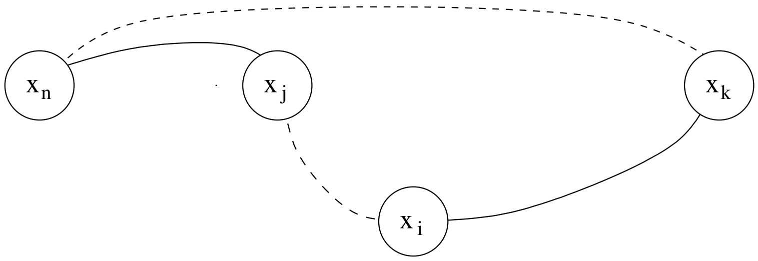
$$A_k = \{s \in V \mid s \text{ est relié à } x_k \text{ et est différent de } x_n\} \quad \text{et}$$
$$A_j = \{s \in V \mid s \text{ est relié à } x_j\}.$$

On a $|A_k| = d_k - 1$ et $|A_j| = d_j$. Or $d_k \leqslant d_j$. Donc $|A_j| > |A_k|$ et il existe donc un sommet x_i relié à x_j et pas à x_k.

On a donc la situation suivante.



En considérant la situation suivante où on a remplacé (x_n, x_k) par (x_n, x_j) et (x_j, x_i) par (x_i, x_k),



on crée un nouveau graphe $\widetilde{G} = (V, (E \backslash \{(x_n, x_k), (x_j, x_i)\}) \cup \{(x_n, x_j), (x_i, x_k)\})$ dont les degrés des sommets sont les mêmes que dans G.

Donc si un des sommets $x_{n-d_n}, \ldots, x_{n-1}$ n'est pas touché par x_n, on peut transformer notre graphe de façon à ce qu'il le soit et ce, sans que les autres sommets de $x_{n-d_n}, \ldots, x_{n-1}$ déja reliés à x_n en "patissent". En itérant le procédé, on se ramène donc à un graphe $\widetilde{G} = (\{x_1, \ldots x_n\}, \widetilde{E})$ qui réalise d et tel que x_n est relié à $x_{n-d_n}, \ldots, x_{n-1}$.

Il suffit alors de vérifier que $G' = (\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}, \widetilde{E} \backslash \{(x_n, x_{n-1}), (x_n, x_{n-2}), \ldots, (x_n, x_{n-d_n})\})$, c'est à dire le graphe $\widetilde{G}$ auquel on enlève x_n, réalise d'.

$\square$