Suites graphiques

On rappelle qu'une suite finie d'entiers positifs $d = (d_1, , \ldots, d_n)$ est dite «*graphique*» s'il existe un graphe dont la suite des degrés des sommets est d.

Question 1. – Soit $d_1, \ldots, d_n$ une suite d'entiers strictement positifs. Monter qu'il existe un arbre dont les sommets ont ces degrés si et seulement si $d_1 + \ldots + d_n = 2n - 2$.

Question 2. – Soit $0 < d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ une suite d'entiers. On définit $d'_i = d_i - 1$ pour $n - d_n \leqslant i \leqslant n - 1$ et $d'_i = d_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n - d_n - 1$. Montrer que $(d_1, \ldots, d_n)$ est graphique si et seulement si $(d'_1, \ldots, d'_{n-1})$ l'est.

Question 3. – Soit G un graphe connexe. Montrer que deux chaînes élémentaires (sans boucles) de longueur maximale ont un sommet en commun.

O. Beaumont, H. Fournier, I. Guerin-Lassous et A. Legrand