Introduction aux graphes (2)

QUESTION 1. – **Théorème d'Euler** : Montrer que la somme des degrés des sommets d'un graphe est égal à deux fois le nombre d'arêtes. En déduire que le nombre sommets de degré impair est pair.

QUESTION 2. – Soit G un graphe à n sommets, p arêtes et k composantes connexes. On se propose de montrer que :

$$n - k \leqslant p \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

1) Montrer que $n - k \leqslant p$ par récurrence sur p.
2) Pour montrer la deuxième inégalité, on cherche le graphe H à n sommets et k composantes connexes qui a le plus d'arêtes.
   a) Montrer que les composantes connexes de H sont des graphes complets.
   b) Montrer que toutes les composantes sauf une sont réduites à un sommet.
   c) Conclure.

QUESTION 3. – **Suites «*graphiques*»** : Une suite finie d'entiers positifs $d = (d_1, , \dots, d_n)$ est dite «*graphique*» s'il existe un graphe dont la suite des degrés des sommets est d.

1) Donner une condition nécessaire simple pour qu'une suite finie d soit graphique.
2) Montrer que cette condition n'est pas suffisante.
3) Montrer que la suite $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$ n'est pas graphique
4) Montrer que la suite $(6, 6, 5, 4, 3, 3, 1)$ n'est pas graphique
5) Montrer que la suite $(7, 6, 3, 3, 2, 1, 1, 1)$ n'est pas graphique
6) Donner un exemple de suite graphique réalisable uniquement par un graphe non connexe.

QUESTION 4. – Soit G un graphe connexe. Montrer que deux chaînes élémentaires (sans boucles) de longueur maximale ont un sommet en commun.

O. BEAUMONT, H. FOURNIER, I. GUERIN-LASSOUS et A. LEGRAND