Automates finis

Question 1. – [Lemme d'Arden] Soient A et B deux langages rationnels. Soit X un langage tel que $X = A \cdot X + B$. Montrer que $L = A^{\star}B$ est inclus dans toute solution de l'équation. Montrer que L en est aussi une. Est-elle unique ? Montrer que si $\varepsilon \notin A$, c'est le cas.

Question 2. – Utiliser la question précédente pour trouver une expression rationnelle du langage reconnu par le deuxième automate de la feuille précédente.

Question 3. – Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage. Le résiduel de L par rapport a un mot u est le langage $u^{-1}L = \{v \in \Sigma^* | u.v \in L\}$.

- Montrer que le nombre de résiduels d'un langage rationel est fini.
- Soit L un langage rationel, construire un automate fini reconaissant L dont les états sont les résiduels de L. En déduire la réciproque de la question 1.
- Montrer qu'il n'existe pas d'automate reconnaissant L ayant moins d'états que le précédent.

Question 4. – On considère un digicode avec 10 chiffres de 0 à 9 et les lettres A et B. Sur combien de touches au minimum faut-il appuyer pour être sûr d'ouvrir la porte ?

O. Beaumont, H. Fournier, I. Guerin-Lassous et A. Legrand