Introduction aux graphes

QUESTION 1. – Le conseil des étudiants est divisé en n commissions chargées de chacun des problèmes de la vie des étudiants. Il est composé d'un certain nombre d'élus. Sachant que :

1) deux commissions quelconques ont en commun exactement un élu, et que
2) chaque élu doit participer à exactement deux commissions,

combien y a-t-il d'élus au conseil des étudiants ?

QUESTION 2. – Soit G un graphe ayant $n > 1$ sommets. Montrer que le degré d'un sommet est toujours strictement inférieur à n. Montrer qu'il ne peut pas y avoir simultanément un sommet de degré $n-1$ et un sommet de degré 0. En déduire qu'il y a au moins deux sommets de même degré.

QUESTION 3. – Soit $G = (S, A)$ un graphe à n sommets. Supposons que G ne contienne pas de triangles : un triangle est formé par trois sommets consécutifs s_1,s_2 et s_3 et trois arêtes $< s_2, s_3 >$, $< s_3, s_1 >$ et $< s_1, s_2 >$.
Montrer que pour deux sommets adjacents distincts x et y, le nombre n_x de sommets de $S - \{x, y\}$ adjacents à x et le nombre n_y de sommets de $S - \{x, y\}$ adjacents à y satisfont l'inégalité :

$$n_x + n_y \leq |S| - 2.$$

En déduire, par induction sur le nombre $|S|$ de sommets, que le nombre d'arêtes $|A|$ vérifie

$$|A| \leqslant \frac{|S|^2}{4}.$$

QUESTION 4. – Soit G un graphe à n sommets, p arêtes et k composantes connexes. On se propose de montrer que :

$$n - k \leqslant p \leqslant \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

1) Montrer que $n - k \leqslant p$ par récurrence sur p.
2) Pour montrer la deuxième inégalité, on cherche le graphe H à n sommets et k composantes connexes qui a le plus d'arêtes.
   a) Montrer que les composantes connexes de H sont des graphes complets.
   b) Montrer que toutes les composantes sauf une sont réduites à un sommet.
   c) Conclure.

QUESTION 5. – Soit G un graphe connexe. Montrer que deux chaînes élémentaires (sans boucles) de longueur maximale ont un sommet en commun.

O. BEAUMONT, H. FOURNIER, I. GUERIN-LASSOUS et A. LEGRAND