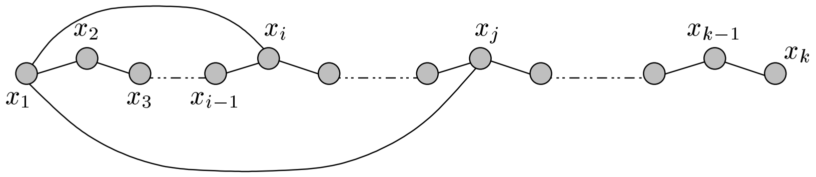
Partiel

Exercice 1. – Soit G un graphe non orienté. Montrer que si tout sommet est de degré au moins 3 alors il existe un cycle de longueur paire.
Indication : considérer un chemin de longueur maximale.

Démonstration.
Considérons un chemin C de longueur maximale dans G et notons $x_1, x_2, \dots x_k$ ce chemin.
x_1 est de degré au moins 3, on sait donc que x_1 possède deux voisins V_1 et V_2 différents de x_2. De plus, puisque C est de longueur maximale, V_1 et V_2 appartiennent nécessairement à C (sinon, par exemple, $V_1, x_1, x_2, \dots x_k$ serait un chemin de $k+1$ sommets dans G). On sait donc

$$\exists i, j,\ i \neq j,\ 2 \leq i, j \leq k \mid V_1 = x_i \text{ et } V_2 = x_j.$$

Par symétrie, on considérera par la suite que $i < j$. La situation est décrite à la figure suivante.



On voit donc apparaître 3 cycles dans G :

1. $C_1 = (x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_i, x_1)$ de longueur i.
2. $C_2 = (x_1, x_2, \dots x_{j-1}, x_j, x_1)$ de longueur j.
3. $C_3 = (x_1, x_i, x_{i+1}, \dots x_{j-1}, x_j, x_1)$ de longueur $i - j + 2$.

On vérifie donc que

1. si i est pair, il existe un chemin de longueur paire : C_1
2. si j est pair, il existe un chemin de longueur paire : C_2
3. si i et j sont impairs, il existe un chemin de longueur paire : C_3 ($i - j + 2$ est pair).

Dans tous les cas, il existe donc un chemin de longueur paire dans G.

Exercice 2. – Soit $G = (V, E)$ un graphe **orienté**. Une numérotation des sommets est une bijection entre V et $\{1, \dots, |V|\}$. Une numérotation f est dite valide si pour toute arête (i, j) du graphe, on a $f(i) < f(j)$.

O. Beaumont, H. Fournier, I. Guerin-Lassous et A. Legrand

1) Montrer que s'il existe une numérotation valide alors le graphe est sans cycle.

Démonstration.
Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et f une numérotation valide de ce graphe. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un cycle $C = (x_1, \ldots, x_n, x_1)$. On a donc $(x_i, x_{i+1}) \in E$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $(x_n, x_1) \in E$. f étant une numérotation valide, on a $f(x_1) < f(x_2) < \cdots < f(x_n) < f(x_1)$, soit $f(x_1) < f(x_1)$, ce qui est absurde.

2) Montrer que si le graphe est sans cycle alors il existe des sommets sans prédécesseurs.

Démonstration.
Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté sans cycle. Supposons par l'absurde qu'il n'existe aucun sommet sans prédécesseur. Soit x_0 un sommet de G. x_0 a au moins un prédécesseur, on peut donc en choisir un et l'appeler x_1. On définit ainsi une suite infinie x par récurrence en choisissant pour x_{n+1} un prédécesseur de x_n. L'ensemble des valeurs de la suite x étant fini, il existe donc $i < j$ tel que $x_i = x_j$ (Principe de Dirichlet, des pigeonniers, des tiroirs, ...). Donc il existe un cycle $(x_j, x_{j-1}, \ldots, x_{i+1}, x_i)$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur le graphe G.

3) Déduire de la question précédente que si le graphe est sans cycle, on peut construire une numérotation valide du graphe.

Démonstration.
On montre par récurrence sur $n \geqslant 1$ que :

$$\boxed{\begin{array}{l} H.R.(n) : \text{Pour tout graphe orienté sans cycle à } n \text{ sommets,} \\ \text{il existe une numérotation valide} \end{array}}$$

$H.R.(1)$: Soit $G = (\{x\}, E)$ un graphe orienté sans cycle à un sommet. Alors, $f : \{x\} \mapsto \{1\}$ définie par $f(x) = 1$ est une numérotation valide de G.

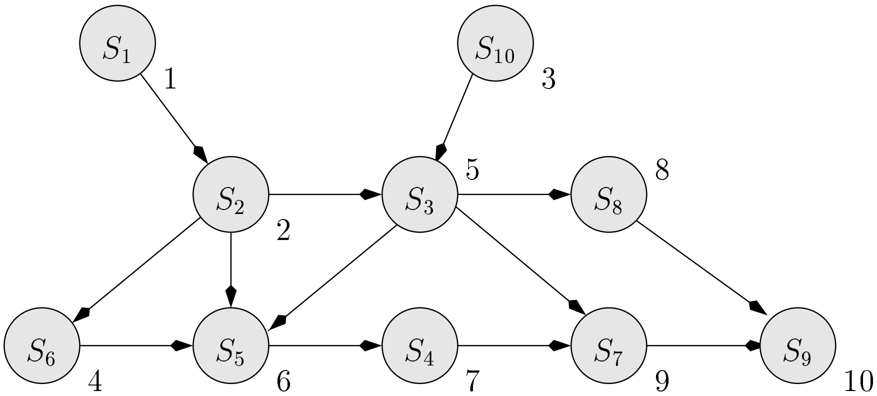
$H.R.(n) \rightsquigarrow H.R.(n+1)$: On suppose $H.R.(n)$ et on va montrer $H.R.(n+1)$. Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté sans cycle à $n+1$ sommets. D'après la question précédente, il existe un sommet $x \in V$ sans prédécesseur. On note $G' = (V', E') = G \backslash \{x\} = (V \backslash \{x\}, E \backslash \{(x, y) \mid (x, y) \in E\})$ le graphe obtenu en enlevant de G le sommet x ainsi que toutes les arêtes qui en sont issues. Soit $f' : V' \mapsto [\![1, n]\!]$ une numérotation valide de G (par hypothèse de récurrence). Définissons $f : V \mapsto [\![1, n+1]\!]$ par

$$f(y) = \begin{cases} f'(y) + 1 & \text{si } y \neq x \\ 1 & \text{si } y = x \end{cases}$$

Montrons que f ainsi définie est une numérotation valide du graphe. Soit $(x_1, x_2) \in E$. Il est impossible d'avoir $x_2 = x$ sinon x aurait un prédécesseur. On a donc deux cas à distinguer : si $x_1 = x$ alors, comme $x_2 \neq x$, on a $f(x_2) = f'(x_2) + 1 > 1 = f(x_1)$; si $x_1 \neq x$ alors $f(x_1) = f'(x_1) + < f'(x_2) + 1 = f(x_2)$. Dans tous les cas, f est donc bien une numérotation valide de G.

4) Construire une numérotation du graphe suivant.

Démonstration.
Voici une numérotation possible mais il y en a bien évidemment plein d'autres.



EXERCICE 3. – On rappelle qu'un graphe $G = (V, E)$ non orienté est dit 2-coloriable s'il existe une application c de V dans $\{0, 1\}$ telle que pour toute arête (x, y) de G, $c(x) \neq c(y)$.

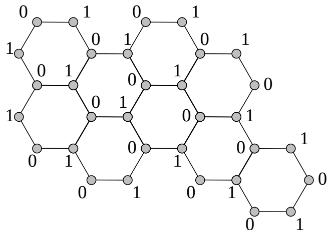
1) Montrer que G est 2-coloriable si et seulement s'il n'a aucun cycle de longueur impaire.

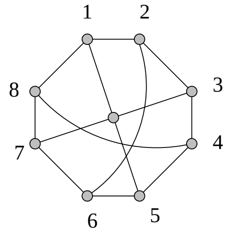
Démonstration.
Nous allons d'abord commencer par montrer que si G est 2-coloriable alors G n'a aucun cycle de longueur impaire. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons que G a au moins un cycle de longueur impaire qu'on notera $(x_1, \ldots, x_{2p+1})$. Soit c un 2-coloriage de ce cycle. On a nécessairement $c(x_1) \neq c(x_2)$ et $c(x_2) \neq c(x_3)$ et comme c est un 2-coloriage, on a donc $c(x_1) = c(x_3)$. Par récurrence, on peut donc montrer que $c(x_1) = c(x_3) = \cdots = c(x_{2p+1})$. Or, x_1 et x_{2p+1} sont reliés donc $c(x_1) \neq c(x_{2p+1})$, ce qui est absurde.

Nous allons maintenant montrer que si G n'a aucun cycle de longueur impaire alors G est 2-coloriable. Supposons que G est connexe. Si ce n'est pas le cas, il suffit d'utiliser la démonstration pour chaque composante connexe de G. Puisque G est connexe, on peut considérer un arbre couvrant A de G. A peut être colorié avec exactement deux couleurs (vu en TD). On va utiliser un coloriage c de A pour colorier G. Lorsqu'on ajoute à A les arêtes de $G \backslash A$, alors on crée des cycles de longueur paire, puisque par hypothèse G n'a pas de cycles de longueur impaire. Montrons que l'ajout de cette arête (x, y) n'invalide pas le coloriage c. Comme (x, y) est sur un cycle de longueur paire, il existe un chemin de longueur impaire de x à y dans A. On a donc $c(x) \neq c(y)$. Le coloriage c est donc bien un coloriage valide de G.

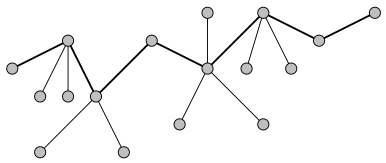
2) Les graphes suivants sont-ils 2-coloriables ?

Démonstration.
Le premier graphe se colorie avec deux couleurs comme indiqué dans la figure suivante. Le deuxième graphe n'est pas 2-coloriable car il contient au moins un cycle de longueur impaire comme le cycle (1,2,6,7,8).





Exercice 4. – Une chenille est un arbre tel qu'il existe un chemin contenant au moins un sommet de chaque arête. Le dessin ci-dessous représente une chenille ; le chemin concerne les arêtes en gras.



Soit $d_1, \ldots, d_n$ une suite d'entiers strictement positifs. Montrer qu'il existe une chenille dont les sommets ont ces degrés si et seulement si $d_1 + \ldots + d_n = 2n - 2$.

Démonstration.
$\boxed{\Rightarrow}$ Comme une chenille est un arbre, une chenille à n sommets a $n-1$ arêtes. Par la formule d'Euler, la suite de ses degrés $(d_1, \ldots, d_n)$ vérifie donc $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, soit $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$ une suite d'entiers strictement positifs de somme $2n-2$. On va montrer qu'il existe une chenille dont les sommets ont pour degrés $(d_1, \ldots, d_n)$. Cette suite est de la forme $(1, \ldots, 1, c_1, \ldots, c_r)$ avec $r \geqslant 0$ et $c_i \geqslant 2$ pour tout i.
Notons k le nombre de 1 dans cette suite ($k \geqslant 0$). On construit notre chenille de la manière suivante : le chemin principal (le corps de la chenille) est formé de la chaîne $(a, x_1, \ldots, x_r, b)$, et sur chaque sommet x_i on greffe $c_i - 2$ sommets de degrés 1 (les pattes) de sorte que son degré soit c_i.
Cette construction convient si le nombre de sommets de degré 1 de cette chenille est égal à k, c'est-à-dire si $k = 2 + \sum_{i=1}^{r}(c_i - 2)$ – le 2 du membre de gauche correspondant aux sommets a et b. Or $k + \sum_{i=1}^{r} c_i = 2n-2$ par hypothèse. Comme de plus $k+r = n$, ceci donne $k + \sum_{i=1}^{r} c_i = 2(k+r)-2$, c'est-à-dire $k = 2 + \sum_{i=1}^{r} c_i - 2r = 2 + \sum_{i=1}^{r}(c_i - 2)$.
Ceci est donc une construction directe de la chenille mais une construction par récurrence directement inspirée de celles vues en TD fonctionnait également très bien.
