KHÔLLE PCSI 3

ARNAUD LEGRAND

Exercice 1 : Cours.
1). Si E et F sont deux espaces de dimension finie, quelle est la dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.
2). Théorème du rang : énoncé et démonstration.
3). Toute famille libre est de cardinal inferieur ou egal à une famille génératrice.
4). Soit $\mathcal{B}_1$ une base de E, $\mathcal{B}_2$ une base de E_2 et $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Qu'est-ce que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f)$? A quoi correspond la composition d'application linéaires ? Et l'évaluation en un "point" ?

Exercice 2 : Quelques exercices autours de la dimension finie.
1). Prouver que $P \mapsto (1-X)P + X^2P'$ est un endomorphisme injectif mais non surjectif de $\mathbb{C}[X]$.
2). Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un et un seul élément P_n de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$. Exprimer P'_n en fonction de P_{n-1}.
3). Montrer que $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est un $\mathbb{Q}$-e.v. Quelle est sa dimension ?
4). Prouver que $\varphi : P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.
5). Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.

- i) Calculer la dimension de $\mathcal{L}(E)$.
- ii) En se souvenant que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, justifier et expliquer la notation $P(f)$ pour f dans $\mathcal{L}(E)$ et P dans $\mathbb{K}[X]$.
- iii) Montrer que pout tout f dans $\mathcal{L}(E)$, il existe un polynôme P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$.
- iv) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E vérifiant $\sum_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$. Prouver que si $a_0 \neq 0$ alors f est inversible.

6). Soit E un $\mathbb{R}$-e.v de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -Id_E$

- i) Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Montrer que $(x, f(x))$ est libre.
- ii) Montrer que la dimension de E est paire.
- iii) Construire un tel endomorphisme dans un espace de dimension infinie.

Exercice 3 : Quelques exercices sur les matrices.
1). Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

- i) Calculer A^2, B^2, AB et BA.
- ii) Soit E le s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par A et B. Préciser sa dimension.
- iii) Montrer que c'est une sous algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- iv) Est-ce un anneau intègre ?
- v) Quels sont ses inversibles ?

2). Soit A la matrice carrée d'ordre n définie par $A_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $A_{i,j} = 1$ sinon. Calculer A^2, A^3 et A^{-1}.
3). Soit E l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que c'est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.
4). Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base.

Date: Année 2001.

5). Soit $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$. Soit A et B définies par $A_{p,q} = \omega^{(p-1)(q-1)}$ et $B_{p,q} = \overline{A_{p,q}}$.

i) Calculer A^2, B^2, AB et BA.

ii) En déduire que A est inversible et préciser son inverse.

6). Soit A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

i) Montrer (à la main!) qu'il existe α, β réels tels que $A^2 - \alpha A + \beta I = 0$.

ii) Montrer que le s.e.v. E engendré par A et I est un anneau commutatif et que si $B \in E$ est inversible, alors B^{-1} est dans E.

iii) A quelle condition E est-il un corps ?

iv) Que trouve-t-on quand $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?

7). Déterminer les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$, soit un groupe.

8). Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note $M_{a,b,c}$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

i) Montrer que l'ensemble E des $M_{a,b,c}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

ii) Préciser sa dimension et en donner une base “simple”.

iii) Montrer que $M_{a,b,c}$ est inversible ssi $a \neq 0$ et expliciter $(M_{a,b,c})^{-1}$.

iv) Calculer $(M_{a,b,c})^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

9). Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2 - A + 3I_n = 0$.

i) Prouver que A est inversible et préciser A^{-1}.

ii) Plus généralement, si P est un polynôme, à quelle condition doit-il satisfaire pour que $P(A) = 0$ implique A inversible ?

iii) Si cette condition est satisfaite, que vaut A^{-1} ?