# KHÔLLE PCSI 3

ARNAUD LEGRAND

**Exercice 1 : Questions de cours.**
1). Montrer que toutes famille $(P_i)_{i\in I}$ de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre.
2). Formule de Taylor pour les polynômes : énoncé et démonstration.
3). Formule de Leibniz : énoncé et démonstration.
4). Énoncé et démonstration du Théorème de Rolle.
5). Dérivée de la fonction réciproque. Énoncé, démonstration et une application.

**Exercice 2 : Généralités vectorielles.**
1). Montrer que la réunion d'une suite croissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espace vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-e.v. $E$ est elle même un sous-espace vectoriel de $E$
2). Soit $E$ le $\mathbb{R}$-e.v. des suites réelles, $F$ le s.e.v. de $E$ constitué des suites qui convergent, $G$ le s.e.v. des suites constantes et $H$ le s.e.v. des suites de limite nulle. Montrer que $F = G \oplus H$.
3). Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons $f_\lambda$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à $x$ associe $e^{\lambda x}$. Montrer que $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4). Montrer que $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-e.v $\mathbb{R}$.
5). Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les applications $x \mapsto \sin 2x$, $x \mapsto \cos 2x$, $x \mapsto \sin^2 x$ sont-elles indépendantes ? Même question avec $x \mapsto \cos^2 x$, $x \mapsto \cos 2x$, $x \mapsto \sin^2 x$.
6). Soit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. prouver que l'on munit $E$ d'une structure de $\mathbb{R}$-e.v. en définissant pour tout élément $(a,b)$ et $(c,d)$ de $E$ et tout réel $\lambda$ : $(a,b)+(c,d) = (ac, b+d)$ et $\lambda.(a,b) = (a^\lambda, \lambda b)$.
7). Quelques questions sur l'espace des suites réelles.

i) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge est-il un s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ?
ii) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2$ converge est-il un s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ?

8). $E$ est le $\mathbb{R}$-e.v. des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\varphi$ l'application qui à $f$ dans $E$ associe $\varphi(f)$ définie par $\varphi(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$. Prouver que $\varphi$ est un endomorphisme. Est-il injectif ? Est-il surjectif ?
9). Soit $E$ le $\mathbb{R}$-e.v. des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $F$ l'ensemble des $f$ de $E$ qui sont dérivables en 0 et nulles en 0.

i) Montrer que $F$ est un s.e.v. de $E$.
ii) Montrer que $\varphi : E \mapsto E$ définie par $\varphi(f)(x) = x.f(x)$ est un endomorphisme de $E$
iii) Montrer que $\operatorname{im}\varphi = F$.
iv) Déterminer $\ker\varphi$.

10). Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.

i) Calculer la dimension de $\mathcal{L}(E)$.
ii) En se souvenant que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, justifier et expliquer la notation $P(f)$ pour $f$ dans $\mathcal{L}(E)$ et $P$ dans $\mathbb{K}[X]$.
iii) Montrer que pout tout $f$ dans $\mathcal{L}(E)$, il existe un polynôme $P$ dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$.
iv) Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. $E$ vérifiant $\sum_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$. Prouver que si $a_0 \neq 0$ alors f est inversible.

*Date*: Année 2001.

11). Soit $E$ un $\mathbb{R}$-e.v de dimension finie et $f$ un endomorphisme de $E$ tel que $f^2 = -Id_E$

i) Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Montrer que $(x, f(x))$ est libre.

ii) Montrer que la dimension de $E$ est paire.

iii) Construire un tel endomorphisme dans un espace de dimension infinie.

**Exercice 3 : Généralités polynômiales.**

1). Prouver que $P \mapsto (1-X)P + X^2P'$ est un endomorphisme injectif mais non surjectif de $\mathbb{C}[X]$.

2). Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un et un seul élément $P_n$ de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$ (si on ne connait rien sur les espaces vectoriels de dimension finie, on pourra s'interesser à $((X+1)^k + X^k)_{k\in\mathbb{N}}$). Exprimer $P'_n$ en fonction de $P_{n-1}$.

3). On défini par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la suite de polynômes suivante : $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$. Établir : $\forall n \in \mathbb{N} : {P_{n+1}}^2 - P_{n+2}P_n = 1$.

4). Prouver que $\varphi : P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ (si on ne connait rien sur les espaces vectoriels de dimension finie, on pourra s'interesser à $(X^k - kX^{k-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$) et expliciter sa dérivée.

5). Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ (non nul!!) tel que $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

6). Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X]/X^4 \mid P(2X) - 2P^2(X) + 1\}$. Montrer que $\forall P_0 \in E : \forall A \in \mathbb{R}[X] : P_0 + X^4A \in E$ puis déterminer $E$.

7). Expliciter la dérivée $n$-iéme de $(X-a)^n(X-b)^n$ et en déduire $\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{C}_n^k)^2$.

**Exercice 4 : Taylor, Rolles et autres accroissements finis...**

1). Montrer que $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x\sin\frac{1}{x}$ et $g : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^2\sin\frac{1}{x}$ peuvent être prolongée par continuité en 0. Étudier la dérivabilité de ces prolongements.

2). Soit $f : x \mapsto \tan x$. Prouver que $f^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$, où $P_n$ est un polynôme de degré $n+1$, de parité opposée à celle de $n$, de coefficient dominant $n!$ et à coefficients tous positifs ou nuls.

3). Soit $f$ :$]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et dérivable. On suppose $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$. La réciproque est -elle vraie ?

4). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, et deux fois dérivables dans $]a,b[$ et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que $\forall c \in ]a,b[ : \exists\gamma \in ]a,b[ : f(c) = \dfrac{(c-a)(c-b)}{2}f''(\gamma)$

5). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ et $x_f \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_f) = x_f$ et $\mid f'(x_f) \mid < 1$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall x \in ]x_f - \epsilon, x_f + \epsilon[ : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_f$ où $f^n$ représente le $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ itéré de $f$.

6). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{3-x^2}{2}$ si $x < 1$ et $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \geqslant 1$. Peut-on appliquer le T.A.F. à $f$ sur $[0,2]$ ? Déterminer tous les $c \in ]0,2[$ tels que $f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$.

7). Prouver que pour $x \neq 0$, l'équation $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6}\operatorname{ch}(\theta x)$ possède une et une seule solution $\theta \in ]0,1[$. On note $\theta(x)$ cette solution. Déterminer $\lim_{x\to0}\theta(x)$.