KHÔLLE PCSI 3

ARNAUD LEGRAND

Exercice 1 : Sommation.
Étudier les sommmes suivantes :
i) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ ii) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)}$ iii) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$ iv) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k^3}{k!}$ v) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!}$
vi) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^3}\right)$ vii) $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \max(i,j)$ viii) $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \min(i,j)$ ix) $\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |i-j|$
x) $\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n}} ij$ xi) $\sum_{\substack{1\leqslant i,j,k\leqslant n\\ i+j+k=n}} ijk$

Exercice 2 : Dénombrement.

1). Démontrer les égalités suivantes :
i) $\sum_{k=0}^{n} C_r^k C_s^{n-k} = C_n^{r+s}$ ii) $\sum_{k=0}^{n} C_m^k C_s^{n-k} = C_{n+1}^{m+1}$ pour $m, n \leqslant 0$ iii) $\sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^k = C_{m+n+1}^n$ iv) $\sum_{k=0}^{n} C_{m+k}^k = C_{m+n+1}^n$ v) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ vi) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
vii) $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$
2). Soit E un ensemble de dix naturels deux à deux distincts, compris entre 1 et 100. Montrer qu'il existe deux parties A et B de E telles que $\sum_{a\in A} a = \sum_{b\in B} b$.
3). Soit E un ensemble fini non vide, de cardinal n. Calculer :

$$\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} (-1)^{|X|} \qquad \sum_{X\in\mathcal{P}(E)} |X| \qquad \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} |X\cap Y|$$

4). Dans un échiquier, compter les carrés à cotés parallèles au quadrillage, et dont les sommets sont des centres de cases ; calculer la valeur moyenne de l'aire de ces carrés.

Exercice 3 : Un peu d'Algèbre.
1). Soit $(\mathcal{A}, +, .)$ un anneau commutatif. On définit $\star$ par $a \star b = a + b - a.b$.
i) Montrer que $\star$ est une loi de composition interne associative.
ii) Soit $b \in \mathcal{A}$. Donner une C.N.S. sur b pour que b soit inversible pour $\star$.
iii) Quel est le plus grand groupe (pour $\star$) contenu dans $\mathcal{A}$?
2). Quelques questions pour remettre les idées en place :
i) $(\mathrm{Bij}(\mathbb{N}), +)$ est-il un groupe ?
ii) $(\mathrm{Bij}(\mathbb{N}), \circ)$ est-il un groupe ?
iii) $(\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N}), +)$ est-il un groupe ?
iv) $(\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N}), *)$ est-il un groupe ?
3). Montrer que la réunion d'une suite croissante de sous-groupes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un groupe G est elle même un sous-groupe de G.

Date: Année 2000.

4). Montrer qu'un groupe G est abélien si et seulement si $x \mapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G.
5). Si $(G, \star)$ est un groupe, montrer que $Z(G) = \{x \in G : \forall y \in G : x \star y = y \star x\}$ est un sous-groupe commutatif de G.
6). Si G est un groupe et H et K sont deux sous-groupes, montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.
7). On va s'intéresser aux sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$

i) Montrer que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe.
ii) Que peut-on dire du module des éléments d'un sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$?
iii) Que peut-on dire de leur argument ?
iv) Conclure.

8). On définit $\star$ par $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ avec la convention $\sqrt[3]{a^3} = a$ pour $a < 0$. Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
9). Soit E un ensemble fini non vide muni d'une loi $\star$ associative telle que E possède un élément neutre e et tout élément est régulier vis-a-vis de $\star$. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe et que l'hypothèse E fini est nécessaire.
10). Soit G un groupe. A tout élément a de G on associe $\varphi_a : x \in G \mapsto axa^{-1}$.

i) Montrer pour tout a dans G, φ_a est un automorphisme de G.
ii) Montrer que $\Phi : a \in G \mapsto \varphi_a$ est un homomorphisme de g dans le groupe $\mathrm{Aut}(G)$ des automorphismes de G.
iii) Que dire de Φ lorsque G est abélien ?
iv) Que représente le noyeau de Φ ?
v) On dit d'un sous-groupe H qu'il est normal si $\forall a \in G \varphi_a(H) = H$. Montrer que l'intersection de deux sous- groupe normaux est normale.
vi) Montrer que le centre d'un groupe est normal.
vii) Montrer que le noyeau $\ker(\varphi)$ d'un homomorphisme de groupe $\varphi : G \to H$ est un sous-groupe normal de G.

Exercice 4 : Généralités vectorielles.
1). Montrer que la réunion d'une suite croissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espace vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E est elle même un sous-espace vectoriel de E
2). Soit E le $\mathbb{R}$-e.v. des suites réelles, F le s.e.v. de E constitué des suites qui convergent, G le s.e.v. des suites constantes et H le s.e.v. des suites de limite nulle. Montrer que $F = G \oplus H$.
3). Soit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. prouver que l'on munit E d'une structure de $\mathbb{R}$-e.v. en définissant pour tout élément (a, b) et (c, d) de E et tout réel λ : $(a, b)+(c, d) = (ac, b+d)$ et $\lambda.(a, b) = (a^\lambda, \lambda b)$.
4). Quelques questions sur l'espace des suites réelles.

i) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge est-il un s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ?
ii) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2$ converge est-il un s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ?

5). E est le $\mathbb{R}$-e.v. des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note φ l'application qui à f dans E associe $\varphi(f)$ définie par $\varphi(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$. Prouver que φ est un endomorphisme. Est-il injectif? Est-il surjectif?
6). Soit E le $\mathbb{R}$-e.v. des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F l'ensemble des f de E qui sont dérivables en 0 et nulles en 0.

i) Montrer que F est un s.e.v. de E.
ii) Montrer que $\varphi : E \mapsto E$ définie par $\varphi(f)(x) = x.f(x)$ est un endomorphisme de E
iii) Montrer que $\mathrm{im}\ \varphi = F$.
iv) Déterminer $\ker \varphi$.

7). Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E vérifiant $\sum_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$. Prouver que si $a_0 \neq 0$ alors f est inversible.