KHÔLLE PCSI 3

ARNAUD LEGRAND

Exercice 1 : Un peu d'Algèbre.

1). Soit $(\mathcal{A}, +, .)$ un anneau commutatif. On définit $\star$ par $a \star b = a + b - a.b$.

i) Montrer que $\star$ est une loi de composition interne associative.

ii) Soit $b \in \mathcal{A}$. Donner une C.N.S. sur b pour que b soit inversible pour $\star$.

iii) Quel est le plus grand groupe (pour $\star$) contenu dans $\mathcal{A}$?

2). Quelques questions pour remettre les idées en place :

i) $(\text{Bij}(\mathbb{N}), +)$ est-il un groupe ?

ii) $(\text{Bij}(\mathbb{N}), \circ)$ est-il un groupe ?

iii) $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}), +)$ est-il un groupe ?

iv) $(\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N}), *)$ est-il un groupe ?

3). Montrer que la réunion d'une suite croissante de sous-groupes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un groupe G est elle même un sous-groupe de G.

4). Montrer qu'un groupe G est abélien si et seulement si $x \mapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G.

5). Si $(G, \star)$ est un groupe, montrer que $Z(G) = \{x \in G : \forall y \in G : x \star y = y \star x\}$ est un sous-groupe commutatif de G.

6). Si G est un groupe et H et K sont deux sous-groupes, montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subseteq K$ ou $K \subseteq H$.

7). On va s'intéresser aux sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$

i) Montrer que $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe.

ii) Que peut-on dire du module des éléments d'un sous-groupe fini de $(\mathbb{C}^*, \times)$?

iii) Que peut-on dire de leur argument ?

iv) Conclure.

8). On définit $\star$ par $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ avec la convention $\sqrt[3]{a^3} = a$ pour $a < 0$. Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

9). Soit E un ensemble fini non vide muni d'une loi $\star$ associative telle que E possède un élément neutre e et tout élément est régulier vis-a-vis de $\star$. Montrer que $(E, \star)$ est un groupe et que l'hypothèse E fini est nécessaire.

10). Soit G un groupe. A tout élément a de G on associe $\varphi_a : x \in G \mapsto axa^{-1}$.

i) Montrer pour tout a dans G, φ_a est un automorphisme de G.

ii) Montrer que $\Phi : a \in G \mapsto \varphi_a$ est un homomorphisme de g dans le groupe $\text{Aut}(G)$ des automorphismes de G.

iii) Que dire de Φ lorsque G est abélien ?

iv) Que représente le noyeau de Φ ?

v) On dit d'un sous-groupe H qu'il est normal si $\forall a \in G \varphi_a(H) = H$. Montrer que l'intersection de deux sous- groupe normaux est normale.

vi) Montrer que le centre d'un groupe est normal.

vii) Montrer que le noyeau $\ker(\varphi)$ d'un homomorphisme de groupe $\varphi : G \to H$ est un sous-groupe normal de G.

Date: Année 2000.

Exercice 2 : Généralités vectorielles.

1). Montrer que la réunion d'une suite croissante $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espace vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E est elle même un sous-espace vectoriel de E

2). Soit E le $\mathbb{R}$-e.v. des suites réelles, F le s.e.v. de E constitué des suites qui convergent, G le s.e.v. des suites constantes et H le s.e.v. des suites de limite nulle. Montrer que $F = G \oplus H$.

3). Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons f_λ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $e^{\lambda x}$. Montrer que $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

4). Montrer que $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-e.v $\mathbb{R}$.

5). Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les applications $x \mapsto \sin 2x$, $x \mapsto \cos 2x$, $x \mapsto \sin^2 x$ sont-elles indépendantes ? Même question avec $x \mapsto \cos^2 x$, $x \mapsto \cos 2x$, $x \mapsto \sin^2 x$.

6). Soit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. prouver que l'on munit E d'une structure de $\mathbb{R}$-e.v. en définissant pour tout élément (a, b) et (c, d) de E et tout réel λ : $(a, b)+(c, d) = (ac, b+d)$ et $\lambda.(a, b) = (a^\lambda, \lambda b)$.

7). Quelques questions sur l'espace des suites réelles.

i) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge est-il un s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ?

ii) L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2$ converge est-il un s.e.v. du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles ?

8). E est le $\mathbb{R}$-e.v. des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note φ l'application qui à f dans E associe $\varphi(f)$ définie par $\varphi(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$. Prouver que φ est un endomorphisme. Est-il injectif? Est-il surjectif ?

9). Soit E le $\mathbb{R}$-e.v. des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F l'ensemble des f de E qui sont dérivables en 0 et nulles en 0.

i) Montrer que F est un s.e.v. de E.

ii) Montrer que $\varphi : E \mapsto E$ définie par $\varphi(f)(x) = x.f(x)$ est un endomorphisme de E

iii) Montrer que im $\varphi = F$.

iv) Déterminer ker φ.

10). Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie.

i) Calculer la dimension de $\mathcal{L}(E)$.

ii) En se souvenant que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, justifier et expliquer la notation $P(f)$ pour f dans $\mathcal{L}(E)$ et P dans $\mathbb{K}[X]$.

iii) Montrer que pout tout f dans $\mathcal{L}(E)$, il existe un polynôme P dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$.

iv) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E vérifiant $\sum_{k=0}^{n} a_k f^k = 0$. Prouver que si $a_0 \neq 0$ alors f est inversible.

11). Soit E un $\mathbb{R}$-e.v de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = -Id_E$

i) Soit $x \in E\backslash\{0\}$. Montrer que $(x, f(x))$ est libre.

ii) Montrer que la dimension de E est paire.

iii) Construire un tel endomorphisme dans un espace de dimension infinie.

Exercice 3 : Généralités polynômiales.

1). Prouver que $P \mapsto (1 - X)P + X^2P'$ est un endomorphisme injectif mais non surjectif de $\mathbb{C}[X]$.

2). Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un et un seul élément P_n de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P_n(X + 1) + P_n(X) = 2X^n$ (si on ne connait rien sur les espaces vectoriels de dimension finie, on pourra s'interesser à $((X + 1)^k + X^k)_{k\in\mathbb{N}}$). Exprimer ${P'}_n$ en fonction de P_{n-1}.

3). On défini par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la suite de polynômes suivante : $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$. Établir : $\forall n \in \mathbb{N} : {P_{n+1}}^2 - P_{n+2}P_n = 1$.

4). Prouver que $\varphi : P \mapsto P - P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$ (si on ne connait rien sur les espaces vectoriels de dimension finie, on pourra s'interesser à $(X^k - kX^{k-1})_{k\in\mathbb{N}^*}$) et expliciter sa dérivée.

5). Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ (non nul!!) tel que $(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$.

6). Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X]/X^4 \mid P(2X) - 2P^2(X) + 1\}$. Montrer que $\forall P_0 \in E : \forall A \in \mathbb{R}[X] : P_0 + X^4A \in E$ puis déterminer E.