KHÔLLE PCSI 3

ARNAUD LEGRAND

Exercice 1 : Cours.
1). Montrer que toute suite croissante majorée converge.
2). Définition de la convergence d'une suite réelle. Démontrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2$ alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2$.
3). Définition de o, $\mathcal{O}$ et $\sim$. Montrer que si $f(x) = x + o(x)$ et $g(x) = x + o(x)$ au voisinnage de 0, alors $f(g(x)) = x + o(x)$ au voisinnage de 0.

Exercice 2 : Ensembles et fonctions.
1). Soient X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$. Montrer que :

i) $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$. A-t-on $f(X \backslash A) = Y \backslash f(A)$?

ii) $f^{-1}(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} f^{-1}(A_i)$ où $\forall i \in \mathcal{I} : A_i \in \mathcal{P}(Y)$.

2). Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective.

i) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leqslant n$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$.

ii) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \geqslant n$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$.

iii) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \neq n$. Montrer que $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < n\}$ et $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > n\}$ sont infinis.

3). Soit $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille finie d'ensembles deux à deux disjoints. Montrer qu'au moins un de ces sensembles n'est inclus dans aucun autre.
4). Pour i dans $\mathbb{Z}$ et j dans $\mathbb{N}$, on définit $A_{i,j} = [\![i-j, i+j]\!]$. Que sont $X = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_{i,j}$ et $Y = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{i,j}$
5). Soit f une fonction de E dans F. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) f est injective

ii) $\forall A \subseteq E : f^{-1}\big(f(A)\big) = A$

iii) il existe g de F dans E telle que $g \circ f = Id_E$

iv) $\forall p : F \to E, \forall q : F \to E : \big(f \circ p = f \circ q \Rightarrow p = q\big)$

6). Soient A et B deux parties de E et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Donner une CNS pour que f soit injective, puis pour que f soit surjective. Expliciter f^{-1} lorsque f est bijective.
7). Soit E un ensemble et f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, croissante pour l'inclusion. On note $E_- = \{A \subseteq E \mid f(A) \subseteq A\}$ et $E_+ = \{B \subseteq E \mid B \subseteq f(B)\}$, puis $X = \bigcap_{A\in E_-} A$ et $Y = \bigcup_{B\in E_+} B$. Prouver que $f(X) = X$ et $f(Y) = Y$.

Exercice 3 : Trigo.
1). Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$. En déduire une forme algébrique de $\sin(\frac{2\pi}{5})$.
2). Exprimer $\tan(6\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$. En déduire une expression simple de $\tan(\frac{\pi}{24})$.

Exercice 4 : Le corps des réels.

Date: du 23 octobre au 10 novembre 2000.

1). Soient $a < b$ deux réels strictement positifs. On note $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*}[ka, kb]$.

i) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $]A, +\infty[\subseteq E$.

ii) Déterminer $\inf\{A \mid]A, +\infty[\subseteq E\}$

2). On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{p + q\sqrt{2} \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que :

i) $\forall\varepsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $0 < x \leqslant \varepsilon$ (on pourra considérer $\lambda = \inf\left(\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{R}_+^*\right)$)

ii) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\forall y \in \mathbb{R} : \forall\varepsilon > 0 : \exists x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $|x - y| < \varepsilon$

Les résultats précédents restent-ils valables si l'on remplace 2 par $n \in \mathbb{N}$?

3). Montrer que l'intersection d'une famille quelconque d'intervalles est, soit vide, soit un intervalle. Donner une condition suffisante pour que la réusion de deux intervalles soit encore un intervalle.

4). Expliciter $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$.

5). Soit $E = \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.

6). Montrer que $A = \{\frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \Rightarrow]x, y[\cap A \neq \emptyset$.

Exercice 5 : Suites réelles.

1). Soit u une suite de réels convergente et prenant ses valeurs dans $\mathbb{Z}$. Prouver qu'une telle suite est stationnaire, c'est à dire que $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0}$.

2). Établir $x > 0 \Rightarrow 1 - x < \frac{1}{1+x} < 1$ puis étudier $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3). Étudier les suites de terme général :

i) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)^2-1}$ ii) $n^2 \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n k^3}$ iii) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ iv) $\frac{(2n)^n}{n^{2n}}$ v) $2^n \sin(2^{-n}\theta)$

4). Pour $n \geqslant 1$, on considère $f_n : x \in \mathbb{R}_*^+ \to \left(\sum_{k=1}^n x^k\right) - 1$. Prouver que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution sur $]0, +\infty[$. Notant a_n cette solution, étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}*}$.

5). Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge vers x. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} : q_n > 0$. Prouver que la suite q tend vers $+\infty$ et que, si $x > 0$, il en est de même pour p.

6). On définit une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fixant $x_0 > 0$ et en posant $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver que $\lim_{n\to+\infty} x_n - \sqrt{x_0^2 + 2n} = 0$. On prend $x_0 = 5$; prouver que $45 < x_{1000} < 45, 1$.