# KHÔLLE PCSI 3

ARNAUD LEGRAND

**Exercice 1 : Cours.**
1). Formules de trigo :

i) $\cos(a+b), \sin(a+b)$ en fonction de $\cos a, \sin a, \cos b, \sin b$ ;

ii) $\cos a \cos b, \sin a \sin b, \sin a \cos b$ en fonction de $\cos(a+b), \sin(a+b), \ldots$ ;

iii) $\cos a + \cos b$ et $\sin a + \sin b$ en fonction de $\cos(\frac{a+b}{2}), \cos(\frac{a-b}{2}), \ldots$ ;

iv) $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$ ;

v) $\sin(2a), \cos(2a), \tan(2a)$ en fonction de $\tan a$

2). Définition de la convergence d'une suite réelle. Démontrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2$ alors $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2$.
3). Comportement des suites monotones.
4). Définition de $\mathcal{O}, o$ et $\sim$. A-t-on $1 + \frac{(-1)^n}{n} \sim 1$ ? et $\frac{(-1)^n}{n} \sim 0$ ?

**Exercice 2 : Suites réelles.**
1). Soit $u$ une suite de réels convergente et prenant ses valeurs dans $\mathbb{Z}$. Prouver qu'une telle suite est stationnaire, c'est à dire que $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0}$.
2). Établir $x > 0 \Rightarrow 1 - x < \frac{1}{1+x} < 1$ puis étudier $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3). Étudier les suites de terme général :

i) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)^2-1}$ ii) $n^2 \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=1}^{n} k^3}$ iii) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ iv) $\frac{(2n)^n}{n^{2n}}$ v) $2^n \sin(2^{-n}\theta)$

4). Pour $n \geqslant 1$, on considère $f_n : x \in \mathbb{R}_*^+ \to \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right) - 1$. Prouver que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution sur $]0, +\infty[$. Notant $a_n$ cette solution, étudier la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
5). Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge vers $x$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$ : $q_n > 0$. Prouver que la suite $q$ tend vers $+\infty$ et que, si $x > 0$, il en est de même pour $p$.
6). Construire une suite $u$ de réels divergente telle que pour tout $k \geqslant 2$, la suite extraite $(u_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
7). On définit une suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fixant $x_0 > 0$ et en posant $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

i) La définition de la suite $x$ est elle valide ?

ii) Montrer que $x$ diverge.

iii) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - \sqrt{x_0^2 + 2n} = 0$.

iv) On prend $x_0 = 5$ ; prouver que $45 < x_{1000} < 45,1$.

8). On définit $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ pour $x \in [0,1]$ et $\lambda > 1$. Soit $u_0 \in ]0,1[$ ; on définit $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.

i) Résoudre $f_\lambda(x) = x$ dans $]0,1[$. On notera $x_\lambda$ cette solution.

ii) Calculer $f_\lambda'(x_\lambda)$ et en déduire une condition sur $\lambda$ pour que $|f_\lambda'(x_\lambda)| < 1$.

iii) En déduire que, pour $\lambda$ vérifiant la condition trouvée en ii), il existe $\epsilon > 0$ tel que $\forall u_0 \in ]x_\lambda - \epsilon, x_\lambda + \epsilon[ : u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_\lambda$.

9). Donner un équivalent simple de $\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n - 1$ quand $n \to +\infty$.
10). Déterminer la limite de $n^2 \left((n+1)^{1/n} - n^{1/n}\right)$.

*Date*: du 9 au 19 octobre 2000.