KHÔLLE PCSI 3

ARNAUD LEGRAND

Exercice 1 : Équations différentielles. Résolution et traçés des solutions des équations différentielles suivantes.
1). $y' \cos x + y \sin x = 3 \tan x$
2). $x.y' - y = ax^2 \cos x$
3). $x.y' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$
4). $y' + y \tan x = -\cos^2 x$

Exercice 2 : Calculs d'intégrales. Calculer les intégrales suivantes : 1) $\int_0^1 \frac{t^2}{t^4+t^2+1} \cdot dt$
2) $\int_0^1 \frac{t}{1+t^4} \cdot dt$ 3) $\int_0^1 t \cos^3 t \cdot dt$ 4) $\int_0^1 t^n \sqrt{1-t} \cdot dt$ 5) $\int_0^1 \ln(1+\tan t) \cdot dt$

Exercice 3 : Calculs. Convergence et calcul des intégrales généralisées suivantes
1). $\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{x^2}) dx$
2). $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$
3). $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt$
4). $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-1/t}}{t^2} dt$
5). $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$
6). $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx$

Exercice 4 : Intégrales.
1). Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+t^n} dt$.
2). Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. Établir que $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\int_a^b f(t)^n dt \big)^{1/n} = \sup\limits_{x\in[0,1]} \mid f(x) \mid$.
3). Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} I_n$ puis montrer que $1 - I_n \sim_\infty \frac{\ln 2}{n}$ à l'aide d'une intégration par partie.
4). Déterminer l'ensemble des fonctions f continues vérifiant $\int_0^x f = \frac{xf(x)}{3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5). Calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ puis de $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}$.

Exercice 5 : Semi-convergence.
1). Savez-vous donner un sens à $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$?
2). Montrer que $u_n = \int_0^{2.\pi.n} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

Date: Année 2001.