KHÔLLE PCSI 3

ARNAUD LEGRAND

Exercice 1 : Cours.
1). Soit $\mathcal{B}_1$ une base de E, $\mathcal{B}_2$ une base de E_2 et $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Qu'est-ce que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(f)$? A quoi correspond la composition d'application linéaires ? Et l'évaluation en un "point" ?
2). Expliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour l'inversion de matrices.
3). Définition d'une fonction convexe. Exemples et contre-exemples. Lien entre convexité d'une fonction et son graphe.

Exercice 2 : Fonctions convexes.
1). Soient f et g deux fonctions convexes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. $f+g$, fg, et λf (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) sont-elles convexes ? La composée de deux fonctions convexes est-elle convexe ? Trouver une condition suffisante sur g pour que $g \circ f$ le soit.
2). Prouver que toute fonction convexe et majorée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est constante. Ce résultat reste-t-il valable pour une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$?
3). Soient f et g deux fonctions convexes sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que $af + bg$ soit affine. Montrer que f et g sont affines.
4). Soit $(f_j)_{j\in J}$ une famille de fonctions convexes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On définit alors $\varphi : x \in I \mapsto \sup_{j\in J} f_j(x)$. Montrer que φ est convexe.

Exercice 3 : Des suites convexes. Soit E le $\mathbb{R}$-ev des suites de réels. Une suite a est dite positive (notée $a \geqslant 0$) ssi $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant 0$. On note Δ l'application de E dans E qui à a associe Δa définie par $(\Delta a)_n = a_{n+1} - a_n$. On note $\Delta^0 = Id_E$ et $\Delta^{k+1} = \Delta^k \circ \Delta$. Une suite a est dite convexe lorsque $\Delta^2(a) \geqslant 0$. Elle est absolument monotone si, $\forall k \in \mathbb{N} : \Delta^k(a) \geqslant 0$. On note E^+ (respectivement E^c et E^a) l'ensemble des suites positives (respectivement convexes et absolument monotones).
1). Montrer (rapidement !) que Δ est un endomorphisme de E et préciser son noyeau.
2). Expliciter les termes généraux de $\Delta^2(a)$ et $\Delta^3(a)$ en fonction de a. En déduire les noyeaux respectifs de Δ^2 et Δ^3.
3). Prouver que $(\Delta^k a)_n = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p C_{n\,k}^{k\,p} a_{n+k-p}$. En déduire la dimension du noyeau de Δ^k.
4). Montrer que E^+, E^c et E^a sont des parties convexes de E mais ne sont pas des s.e.v de E.
5). Déterminer les réels α tels que $e^{n\alpha}$ soit absolument monotone.
6). Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. En admettant l'existence de $\theta \in]-1, 1[$ tel que $f(1) - 2f(0) + f(-1) = f''(\theta)$, montrer que si f'' est positive, alors la suite de terme général $f(n)$ est convexe.
7). Soient $p < q$ deux naturels. Exprimer $a_p - a_q$ comme somme de termes de la suite Δa.
8). Soit $a \in E$ vérifiant $\Delta a \geqslant 0$ et $\Delta^2 a \geqslant 0$. Montrer que pour tous naturels n et p, on a $a_{n+p} - a_n \geqslant a_p - a_0$. En déduire que si a converge, elle est constante.

Exercice 4 : Quelques exercices sur les matrices.
1). Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Calculer A^2, B^2, AB et BA.
ii) Soit E le s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ engendré par A et B. Préciser sa dimension.
iii) Montrer que c'est une sous algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
iv) Est-ce un anneau intègre ?
v) Quels sont ses inversibles ?

Date: Année 2001.

2). Soit A la matrice carrée d'ordre n définie par $A_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $A_{i,j} = 1$ sinon. Calculer A^2, A^3 et A^{-1}.

3). Soit E l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que c'est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

4). Soit $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A. Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et en donner une base.

5). Soit $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$. Soit A et B définies par $A_{p,q} = \omega^{(p-1)(q-1)}$ et $B_{p,q} = \overline{A_{p,q}}$.

i) Calculer A^2, B^2, AB et BA.

ii) En déduire que A est inversible et préciser son inverse.

6). Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7). Soit A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

i) Montrer (à la main !) qu'il existe α, β réels tels que $A^2 - \alpha A + \beta I = 0$.

ii) Montrer que le s.e.v. E engendré par A et I est un anneau commutatif et que si $B \in E$ est inversible, alors B^{-1} est dans E.

iii) A quelle condition E est-il un corps ?

iv) Que trouve-t-on quand $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?

8). Déterminer les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & x & f(x) \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$, soit un groupe.

9). Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note $M_{a,b,c}$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

i) Montrer que l'ensemble E des $M_{a,b,c}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

ii) Préciser sa dimension et en donner une base "simple".

iii) Montrer que $M_{a,b,c}$ est inversible ssi $a \neq 0$ et expliciter $(M_{a,b,c})^{-1}$.

iv) Calculer $(M_{a,b,c})^n$, pour $n \in \mathbb{N}$.

10). Soit A une matrice carrée d'ordre n vérifiant $A^2 - A + 3I_n = 0$.

i) Prouver que A est inversible et préciser A^{-1}.

ii) Plus généralement, si P est un polynôme, à quelle condition doit-il satisfaire pour que $P(A) = 0$ implique A inversible ?

iii) Si cette condition est satisfaite, que vaut A^{-1} ?

Exercice 5 : Calculs d'intégrales. Calculer les intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t^4 + t^2 + 1} \cdot dt$

ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1 + t^4} \cdot dt$

iii) $\displaystyle\int_0^1 t \cos^3 t \cdot dt$

iv) $\displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1 - t} \cdot dt$

v) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1 + \tan t) \cdot dt$