KHÔLLE PCSI 3

ARNAUD LEGRAND

Exercice 1 : Fonctions convexes.
1). Soient f et g deux fonctions convexes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. $f+g$, fg, et λf (pour $\lambda \in \mathbb{R}$) sont-elles convexes ? La composée de deux fonctions convexes est-elle convexe ? Trouver une condition suffisante sur g pour que $g \circ f$ le soit.
2). Prouver que toute fonction convexe et majorée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est constante. Ce résultat reste-t-il valable pour une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$?
3). Soient f et g deux fonctions convexes sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que $af + bg$ soit affine. Montrer que f et g sont affines.
4). Soit $(f_j)_{j \in J}$ une famille de fonctions convexes sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On définit alors $\varphi : x \in I \mapsto \sup_{j \in J} f_j(x)$. Montrer que φ est convexe.

Exercice 2 : Des suites convexes. Soit E le $\mathbb{R}$-ev des suites de réels. Une suite a est dite positive (notée $a \geqslant 0$) ssi $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant 0$. On note Δ l'application de E dans E qui à a associe Δa définie par $(\Delta a)_n = a_{n+1} - a_n$. On note $\Delta^0 = Id_E$ et $\Delta^{k+1} = \Delta^k \circ \Delta$. Une suite a est dite convexe lorsque $\Delta^2(a) \geqslant 0$. Elle est absolument monotone si, $\forall k \in \mathbb{N} : \Delta^k(a) \geqslant 0$. On note E^+ (respectivement E^c et E^a) l'ensemble des suites positives (respectivement convexes et absolument monotones).
1). Montrer (rapidement !) que Δ est un endomorphisme de E et préciser son noyeau.
2). Expliciter les termes généraux de $\Delta^2(a)$ et $\Delta^3(a)$ en fonction de a. En déduire les noyeaux respectifs de Δ^2 et Δ^3.
3). Prouver que $(\Delta^k a)_n = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p C_k^p a_{n+k-p}$. En déduire la dimension du noyeau de Δ^k.
4). Montrer que E^+, E^c et E^a sont des parties convexes de E mais ne sont pas des s.e.v de E.
5). Déterminer les réels α tels que $e^{n\alpha}$ soit absolument monotone.
6). Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. En admettant l'existence de $\theta \in]-1,1[$ tel que $f(1) - 2f(0) + f(-1) = f''(\theta)$, montrer que si f'' est positive, alors la suite de terme général $f(n)$ est convexe.
7). Soient $p < q$ deux naturels. Exprimer $a_p - a_q$ comme somme de termes de la suite Δa.
8). Soit $a \in E$ vérifiant $\Delta a \geqslant 0$ et $\Delta^2 a \geqslant 0$. Montrer que pour tous naturels n et p, on a $a_{n+p} - a_n \geqslant a_p - a_0$. En déduire que si a converge, elle est constante.

Exercice 3 : Calculs d'intégrales. Calculer les intégrales suivantes :

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{t^4 + t^2 + 1} \cdot dt$

ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1 + t^4} \cdot dt$

iii) $\displaystyle\int_0^1 t \cos^3 t \cdot dt$

iv) $\displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1-t} \cdot dt$

v) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1 + \tan t) \cdot dt$

Date: Année 2001.