KHÔLLE PCSI 3

ARNAUD LEGRAND

Exercice 1 : Cours.
1). Définition de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité. Donner des exemples.
2). Formules de trigo :

i) $\cos(a+b), \sin(a+b)$ en fonction de $\cos a, \sin a, \cos b, \sin b$;

ii) $\cos a \cos b, \sin a \sin b, \sin a \cos b$ en fonction de $\cos(a+b), \sin(a+b), \dots$;

iii) $\cos a + \cos b$ et $\sin a + \sin b$ en fonction de $\cos(\frac{a+b}{2}), \cos(\frac{a-b}{2}), \dots$;

iv) $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$;

v) $\sin(2a), \cos(2a), \tan(2a)$ en fonction de $\tan a$

3). Définition des racines $n^{ème}$ de l'unité et propriétés de bases.
4). Donner une forme close de $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ et $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$.
5). Définition des bornes supérieures et inférieures d'une partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Ensembles et fonctions.
1). Soit E un ensemble. i) exhiber une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$. ii) Prouver qu'aucune application de E dans $\mathcal{P}(E)$ n'est surjective.
Indication : Considérer $B_f = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$
2). Soient X et Y deux ensembles, $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$. Montrer que :

i) $f^{-1}(Y \backslash B) = X \backslash f^{-1}(B)$. A-t-on $f(X \backslash A) = Y \backslash f(A)$?

ii) $f^{-1}(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} f^{-1}(A_i)$ où $\forall i \in \mathcal{I} : A_i \in \mathcal{P}(Y)$.

3). Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective.

i) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \leqslant n$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$.

ii) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \geqslant n$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$.

iii) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) \neq n$. Montrer que $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < n\}$ et $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > n\}$ sont infinis.

4). Soit $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille finie d'ensembles deux à deux disjoints. Montrer qu'au moins un de ces sensembles n'est inclus dans aucun autre.
5). Pour i dans $\mathbb{Z}$ et j dans $\mathbb{N}$, on définit $A_{i,j} = [\![i-j, i+j]\!]$. Que sont $X = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{i,j}$ et $Y = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_{i,j}$
6). Soit f une fonction de E dans F. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

i) f est injective

ii) $\forall A \subseteq E : f^{-1}\big(f(A)\big) = A$

iii) il existe g de F dans E telle que $g \circ f = Id_E$

iv) $\forall p : F \to E, \forall q : F \to E : \big(f \circ p = f \circ q \Rightarrow p = q\big)$

7). Soient A et B deux parties de E et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Donner une CNS pour que f soit injective, puis pour que f soit surjective. Expliciter f^{-1} lorsque f est bijective.

Date: du 25 septembre au 6 octobre 2000.

8). Soit E un ensemble et f une application de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même, croissante pour l'inclusion. On note $E_- = \{A \subseteq E \mid f(A) \subseteq A\}$ et $E_+ = \{B \subseteq E \mid B \subseteq f(B)\}$, puis $X = \bigcap_{A \in E_-} A$ et $Y = \bigcup_{B \in E_+} B$. Prouver que $f(X) = X$ et $f(Y) = Y$.

Exercice 3 : Complexes.
1). Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$. En déduire une forme algébrique de $\sin(\frac{2\pi}{5})$.
2). Exprimer $\tan(6\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$. En déduire une expression simple de $\tan(\frac{\pi}{24})$.

3). Soient a, b, n des entiers naturels. Prouver qu'il existe des entiers naturels x et y tels que $(a^2 + b^2)^n = x^2 + y^2$.
4). Déterminer les parties finies de $\mathbb{C}$ stables pour la multiplication.
5). Développer $(Z + 1)^7$ puis résoudre $Z^6 + 21Z^4 + 35Z^2 + 7 = 0$.

Exercice 4 : Le corps des réels.
1). Soient $a < b$ deux réels strictement positifs. On note $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} [ka, kb]$.

i) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $]A, +\infty[\subseteq E$.

ii) Déterminer $\inf\{A \mid]A, +\infty[\subseteq E\}$

2). On note $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{p + q\sqrt{2} \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que :

i) $\forall \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $0 < x \leqslant \varepsilon$ (on pourra considérer $\lambda = \inf\left(\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{R}_+^*\right)$)

ii) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\forall y \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ tel que $|x - y| < \varepsilon$

Les résultats précédents restent-ils valables si l'on remplace 2 par $n \in \mathbb{N}$?
3). Montrer que l'intersection d'une famille quelconque d'intervalles est, soit vide, soit un intervalle. Donner une condition suffisante pour que la réusion de deux intervalles soit encore un intervalle.
4). Expliciter $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$.
5). Soit $E = \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \mid (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.
6). Montrer que $A = \{\frac{p}{2^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \Rightarrow]x, y[\cap A \neq \emptyset$.