Fiche 5 : La méthode du rejet

Exercice 1. Méthode de rejet Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F, et dont les valeurs sont dans l'intervalle $[a, b]$. On note f sa densité et F sa fonction de répartition. On supposera qu'il existe un majorant h de f sur l'intervalle $[a, b]$.

```
repeter
   x= uniform(a,b); /* genere une variable aleatoire uniforme sur [a,b[ */
   y= uniform(0,1)*h ;
jusqu'a (y <= f(x));
return x
```

1. Faire un ou des dessins.
2. Montrer que la valeur générée est distribuée selon la densité f.
3. Quelle est la complexité de cet algorithme en nombre de passages dans la boucle ? Quelle est la "meilleure" valeur de h ?
4. Donner sur des dessins des exemples ou la complexité est faible, importante.
5. Utiliser cette méthode pour générer une variable aléatoire de densité
   (a) $f(x) = 2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$;
   (b) $f(x) = \frac{\pi}{2} sin(\pi x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$;
   (c) $f(x) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.
6. Soit f une fonction de densité d'une variable aléatoire X que l'on sait générer par un algorithme. Montrer que l'algorithme suivant génère un point distribué uniformément sur la surface définie entre la courbe f et l'axe des abscisses.

```
X = genere_X()   /* genere un échantillon de X */
Y= uniform(0,1)*f(X);
return M=(X,Y);
```

7. Soit X de densité f. On suppose qu'il existe g une densité et un coefficient h tel que pour tout x, $f(x) \leqslant h{*}g(x)$. On suppose également que l'on est capable de générer une variable aléatoire Y de densité g. Montrer que l'algorithme suivant génère une variable aléatoire de densité f.

```
repeter
   x= genere_Y();  /* genere une variable aleatoire de densite g  */
   y= uniform(0,1)*h*g(x) ;
jusqu'a (y <= f(x));
return x
```

   On pourra faire un dessin.

Exercice 2. Loi triangulaire On définit la distribution triangulaire par la densité $f(x) = x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (2-x)\mathbb{1}_{[1,2]}(x)$.

1. Vérifier que f est bien une densité, calculer sa fonction de répartition et en déduire un premier algorithme de simulation.
2. Proposer un algorithme de rejet pour générer cette loi et calculer son coût. Peut-on l'améliorer ?
3. Soit U, V des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1[$. Calculer la densité de $U + V$. En déduire un algorithme de simulation.
4. Comparer ces 3 algorithmes.

Exercice 3. Loi Normale Comme nous l'avons vu la dernière fois, la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ de densité $f(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$ a une fonction de répartition $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ difficile à inverser autrement que numériquement. Nous avons donc vu la dernière fois la méthode de Box-Müller qui repose sur le principe suivant : soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Par passage en coordonnées polaires, on note $\varrho = \sqrt{X^2 + Y^2}$ et $\theta = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$. Alors on peut montrer que θ suit une loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ et que ϱ^2 suit une loi exponentielle de taux $\frac{1}{2}$. On en déduit donc l'algorithme de génération suivant : soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires uniformes sur $[0, 1]$, alors

$$\begin{cases} \varrho &= \sqrt{-2\log(U_1)} \\ \theta &= 2\pi U_2 \end{cases} \text{ et à partir de là } \begin{cases} X &= \varrho\cos(\theta) \\ Y &= \varrho\sin(\theta) \end{cases}.$$

Un des inconvénient de cette méthode est qu'elle implique l'utilisation de fonction trigonométriques coûteuses. On va donc regarder une méthode de génération basée sur la méthode du rejet.

Trouver une valeur h telle que $\frac{2}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}} \leqslant h * e^{-x}$. Proposer un algorithme de génération d'une variable de densité $\frac{2}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$. En déduire un algorithme pour générer une variable de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
Comparer les performances des deux algorithmes.